Journal of Geometry and Physics 10 (1993) 345–380
North-Holland

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Courbure scalaire et géométrie conforme

Emmanuel Hebey
Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Received 14 July 1992

We present a study of the scalar curvature problems in conformal geometry. We deal with the Nirenberg and Yamabe problems, the prescribed scalar curvature problem, the Yamabe equivariant problem, and the questions connected with the multiplicity of metrics having the same scalar curvature. The problems of the best constants in the Sobolev imbedding theorem and the positive mass theorem (which is highly physical and connected with general relativity) are first treated. The mathematics of these two subjects will appear throughout the text.

On présente une étude des problèmes de courbure scalaire en géométrie conforme. Sont ainsi traités: les problèmes de Nirenberg et Yamabe, le problème de la courbure scalaire prescrite, le problème de Yamabe équivariant et les questions relatives à la multiplicité des métriques ayant une même courbure scalaire. Les problèmes de meilleures constantes dans les inclusions de Sobolev et le théorème de la masse positive (qui est hautement physique et lié à la relativité générale) sont d'abord présentés. Les mathématiques de ces deux sujets apparaitront tout au long du texte.

Keywords: *calculus of variations, conformal geometry, positive mass theorem, scalar curvature, Sobolev spaces*
1991 MSC: 53 C 21, 58 G 30

Table des matières

Les problèmes de courbure scalaire, et notamment les deux problèmes phares que sont les problèmes de Yamabe et Nirenberg, ont fait l'objet de nombreux travaux. Disons déjà que si (X, g) désigne une variété riemannienne compacte et si (S^n, g_0) désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, il s'agira pour l'un de prouver l'existence d'une métrique conforme à g qui est à courbure scalaire constante (Yamabe), et pour l'autre de caractériser les fonctions C^∞ numériques définis sur S^n qui sont courbures scalaires de métriques conformes à g_0 (Nirenberg).

Le problème de Yamabe est maintenant résolu. Le résultat fût annoncé en 1960 par Yamabe [94], mais il fallut attendre les travaux de Aubin [3] en 1976 et de Schoen [77] en 1984 pour en avoir une démonstration correcte. Ceci étant dit, depuis 1984, de nombreuses autres contributions sont parues. Certaines unifient les approches de Aubin et Schoen, comme dans Hebey et Vaugon [44] ou Lee et Parker [62], d'autres présentent maintenant de nouvelles démonstrations comme dans Bahri [9], Bahri et Brézis [10] et Schoen [78,80].

Le problème de Nirenberg semble par contre bien loin d'être résolu. En fait, deux difficultés principales apparaissent. D'une part il existe des fonctions qui ne sont pas courbures scalaires de métriques conformes à g_0 (Bourguignon et Ezin [19], Kazdan et Warner [57]); d'autre part la méthode variationnelle ne peut pas fonctionner dans ce cadre précis. Face à ces difficultés, deux approches ont été développées. Illustrées, pour l'une, par les travaux de Bahri et Coron [12] (mais cf. aussi les réfs. [11,23,32]), pour l'autre, par les travaux de Escobar et Schoen [34], Hebey [41], Moser [70], et Vaugon [90].

Dans toute la suite les variétés seront supposées de dimensions $n \geqslant 3$, même si les questions demeurent identiques lorsque $n=2$. Les approches et le type des difficultés diffèrent par contre réellement selon que $n=2$ ou $n \geqslant 3$.

Pour le cas de la dimension $n=2$ on renvoie à Aubin [1,5], Berger [16], Bourguignon et Ezin [19], Chang et Yang [26,28], Han [40], Kazdan et Warner [57], Moser [70] et Troyanov [85].

1. Définitions et notations

Dans tout ce qui suit (X, g) désigne une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. La convention d'Einstein est adoptée, de sorte que $\alpha_i x^i = \sum \alpha_i x^i$. On note $R(g)$ le tenseur de courbure de la métrique g. Il s'agit ici d'un tenseur quatre fois covariant dont les composantes sont données dans une carte locale par

$$R(g)_{jikl} = g_{mj}(\partial_k \Gamma_{il}^m - \partial_l \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{k\alpha}^m \Gamma_{il}^\alpha - \Gamma_{\alpha l}^m \Gamma_{ik}^\alpha) ,$$

où les $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}) g^{mk}$ représentent les symboles de Christoffel de la connexion riemannienne. Le tenseur de Ricci $\mathrm{Ric}(g)$ de la métrique g, tenseur deux fois covariant, a pour composantes dans une carte locale $\mathrm{Ric}(g)_{ik} = g^{jl} R(g)_{ijkl}$. $\mathrm{Scal}(g)$, la courbure scalaire de g, fonction numérique définie sur X, vaut $\mathrm{Scal}(g) = g^{ij} \mathrm{Ric}(g)_{ij}$. On note $\mathscr{E}\mathrm{in}(g)$ et $h(g)$ les tenseurs d'Einstein de g et de Weyl–Schouten de g, tenseurs deux fois covariant définis respectivement par

$$\mathscr{E}\mathrm{in}(g)=\mathrm{Ric}(g)-\frac{\mathrm{Scal}(g)}{n}g\,,\qquad h(g)=\frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}(g)-\frac{\mathrm{Scal}(g)}{2(n-1)}g\right).$$

On note enfin Weyl(g) le tenseur de Weyl de g, tenseur quatre fois covariant qui est défini dans une carte locale par

$$\begin{aligned}\mathrm{Weyl}(g)_{ijkl}&=R(g)_{ijkl}\\&\quad-\frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric}(g)_{ik}g_{jl}-\mathrm{Ric}(g)_{il}g_{jk}+\mathrm{Ric}(g)_{jl}g_{ik}-\mathrm{Ric}(g)_{jk}g_{il}\right)\\&\quad+\frac{\mathrm{Scal}(g)}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}\right).\end{aligned}$$

Ce tenseur a la propriété remarquable d'être un invariant conforme (cf. ci-dessous). Les normes de ces différents tenseurs sont définies par

$$|R(g)|^2=R(g)_{ijkl}R(g)^{ijkl}\,,\qquad |\mathrm{Ric}(g)|^2=\mathrm{Ric}(g)_{ij}\mathrm{Ric}(g)^{ij}\,,$$

etc., où par $R(g)^{ijkl}$ on entend $g^{ai}g^{bj}g^{ck}g^{dl}R(g)_{abcd}$ et par $\mathrm{Ric}(g)^{ij}$ on entend $g^{ai}g^{bj}\mathrm{Ric}(g)_{ab}$. $[g]$ désigne la classe conforme de g, ensemble des métriques riemanniennes sur X qui sont conformes à g, à savoir du type fg où f est une fonction C^∞ numérique strictement positive définie sur X,

$$[g]=\{fg, f\in C^\infty(X), f>0\}\,.$$

Pour f une fonction C^∞ numérique définie sur X on a

$$\mathrm{Weyl}(e^f g)=e^f\,\mathrm{Weyl}(g)$$

et, dans une carte locale,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(e^f g)_{ij}&=\mathrm{Ric}(g)_{ij}-\tfrac{1}{2}(n-2)\nabla_{ij}f+\tfrac{1}{4}(n-2)\nabla_i f\nabla_j f\\&\quad-\tfrac{1}{2}\left[g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}f+\tfrac{1}{2}(n-2)g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha f\nabla_\beta f\right]g_{ij}\,.\end{aligned}$$

De même, pour $u>0$,

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u+\mathrm{Scal}(g)u=\mathrm{Scal}(u^{4/(n-2)}g)u^{(n+2)/(n-2)}\,,$$

où le laplacien Δ_g opérant sur les fonctions est défini par

$$\Delta_g f=-g^{ij}(\partial_{ij}f-\Gamma_{ij}^k\partial_k f)\,.$$

A partir de Δ_g on construit le laplacien conforme

$$\mathbb{L}_g(u)=\Delta_g u+\frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{Scal}(g)u\,.$$

$\mathbb{L}_g$ a la propriété remarquable suivante: si $g'=u^{4/(n-2)}g$, alors $\forall\phi\in C^\infty(X)$,

$$\mathbb{L}_g(u\phi)=u^{(n+2)/(n-2)}\mathbb{L}_{g'}(\phi)\ .$$

(X, g) est dite localement conformément plate si $\forall x\in X$, il existe $g'\in[g]$ qui soit euclidienne au voisinage de x (à savoir vérifiant $R(g')=0$ au voisinage de x, ou encore ce qui est équivalent, vérifiant $g'_{ij}=\delta_{ij}$ dans une carte en x convenable).

Pour $n\geqslant 4$, (X, g) est localement conformément plate si et seulement si $\mathrm{Weyl}(g)=0$ sur X. En dimension 3, (X, g) est localement conformément plate si et seulement si $\mathrm{d}^D h(g)=0$ sur X, où, dans une carte locale,

$$\mathrm{d}^D h(g)_{ijk}=\nabla_i h(g)_{jk}-\nabla_j h(g)_{ik}\ .$$

(Lorsque $n=3$, $\mathrm{Weyl}(g)$ est nul.) Pour ces deux assertions, cf. par exemple Lafontaine [60].

$\mathrm{Diff}(X)$ désignant le groupe des difféomorphismes de X, on note maintenant $I(X, g)$ le groupe des isométries de (X, g),

$$I(X, g)=\{\sigma\in\mathrm{Diff}(X)/\sigma^*g=g\}\ .$$

$C(X, g)$ désigne le groupe des difféomorphismes conformes de (X, g). A savoir:

$$C(X, g)=\{\sigma\in\mathrm{Diff}(X)/\sigma^*g\in[g]\}\ .$$

Deux variétés (X, g) et (Y, g') sont conformément difféomorphes s'il existe un difféomorphisme ϕ de X dans Y vérifiant $\phi^*g'\in[g]$. En particulier, si (S^n, g_0) désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa métrique standard induite de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$, on écrit $X\neq\mathrm{S}^n$ pour signifier que (X, g) et (S^n, g_0) ne sont pas conformément difféomorphes. On note ω_n le volume de (S^n, g_0).

Théorème (Lafontaine [60], Lelong-Ferrand [63], Obata [71], Schoen [78]). *Si $X\neq\mathrm{S}^n$, il existe $g'\in[g]$ telle que $I(X, g')=C(X, g)$. Pour $g\in[g_0]$, les inclusions $I(\mathrm{S}^n, g)\subset C(\mathrm{S}^n, g_0)$ sont toujours strictes.*

On définit l'espace de Sobolev $H_1^2(X)$, qui est indépendant de la métrique g, comme le complété des fonctions C^∞ numériques définies sur X pour la norme

$$\|u\|^2=\int_X|\nabla u|^2\,\mathrm{d}v(g)+\int_X u^2\,\mathrm{d}v(g)\ .$$

Théorème de Sobolev. *$H_1^2(X)$ se plonge continûment dans $L^{2n/(n-2)}(X)$. En particulier, il existe des constantes A et B de sortes que*

$$\left(\int_X|u|^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g)\right)^{(n-2)/n}\leqslant A\int_X|\nabla u|^2\,\mathrm{d}v(g)+B\int_X u^2\,\mathrm{d}v(g)\ ,\quad\forall u\in H_1^2(X)\ .$$

Théorème de Kondrakov. *Pour tout* $1<q<2n/(n-2)$, *l'inclusion de* $H_1^2(X)$ *dans* $L^q(X)$ *est compacte.*

On définit finalement les fonctionnelles I et J sur $H_1^2(X)$ par

$$I(u)=\int_X |\nabla u|^2 \,dv(g)+\frac{n-2}{4(n-1)}\int_X \mathrm{Scal}(g)u^2 \,dv(g) ,$$

$$J(u)=\frac{\int_X |\nabla u|^2 \,dv(g)+\frac{n-2}{4(n-1)}\int_X \mathrm{Scal}(g)u^2 \,dv(g)}{(\int_X |u|^{2n/(n-2)} \,dv(g))^{(n-2)/n}} .$$

Pour u dans $H_1^2(X)$ on a $I(|u|)=I(u)$ (et donc aussi $J(|u|)=J(u)$, cf. Aubin [1]). Si

$$A=\{u>0/\int_X fu^{2n/(n-2)} \,dv(g)=1\} ,$$

les points critiques $u>0$ de I sur A vérifient $\mathrm{Scal}(u^{4/(n-2)}g)=\mathrm{C^{te}}f$. L'inf de la fonctionnelle J sur les $u>0$ de $H_1^2(X)$, on écrit $\mathrm{Inf}_{u>0}J(u)$, et l'inf de la fonctionnelle I sur A, on écrit $\mathrm{Inf}_A I(u)$, sont des invariants conformes (i.e., ne dépendent que de $[g]$).

A noter: la non compacité de l'inclusion $H_1^2(X)\subset L^{2n/(n-2)}(X)$.

2. Meilleures constantes dans les inclusions de Sobolev

Avec le théorème de Sobolev, il existe des constantes A et B de sorte que

$$\left(\int_X |u|^{2n/(n-2)} \,dv(g)\right)^{(n-2)/n} \leqslant A\int_X |\nabla u|^2 \,dv(g)+B\int_X u^2 \,dv(g) , \quad \forall u\in H_1^2(X) . \tag{S1}$$

La constante B dépend ici forcément de la variété (autrement que par la dimension). En particulier, le choix de $u=1$ dans (S1) montre que $B\geqslant \mathrm{vol}(g)^{-2/n}$ [où $\mathrm{vol}(g)=\int_X dv(g)$ représente le volume de (X,g)]. Par contre, le meilleur A possible ne dépend que de la dimension n. Il s'agit là d'un résultat remarquable de Aubin [2] qui s'énonce

Théorème (Aubin [2]).

(1) On a toujours $A\geqslant 4/n(n-2)\omega_n^{2/n}$, ω_n *le volume de la sphère unité* S^n *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *munie de sa métrique standard induite de la métrique euclidienne.*

(2) A toute constante $A>4/n(n-2)\omega_n^{2/n}$ *on peut associer une constante B de sorte que (S1) ait lieu.*

Conjecture (Aubin [2]). *La constante $4/n(n-2)\omega_n^{2/n}$ est atteinte. A savoir: Quelle que soit la variété riemannienne compacte (X, g) considérée, il existe toujours une constante B de sorte que:*

$$\left(\int_X |u|^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g)\right)^{(n-2)/n} \leqslant \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}\int_X |\nabla u|^2\,\mathrm{d}v(g)+B\int_X u^2\,\mathrm{d}v(g)\,,\quad \forall u\in H_1^2(X)\,. \qquad \text{(S2)}$$

Il est à noter que cette conjecture ne dépend que de $[g]$. Lorsque g est à courbure sectionnelle constante, la conjecture a été démontrée par Aubin dans la réf. [2]. Plus généralement, cette conjecture reste vraie si la variété est localement conformément plate. La question est ouverte dans les autres cas.

Théorème (Hebey et Vaugon [45]). *(S2) est vérifiée par toute variété riemannienne compacte localement conformément plate.*

Dans la réf. [45], un contrôle de B est en plus obtenu. Ce qui fournit notamment les inégalités suivantes:

(1) $\mathbb{P}_n$ désignant l'espace projectif de dimension n muni de sa métrique standard induite de S^n:

$$\left(\int_X |u|^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g)\right)^{(n-2)/n} \leqslant \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}\int_X |\nabla u|^2\,\mathrm{d}v(g)+\frac{n+2}{(n-2)\omega_n^{2/n}}\int_X u^2\,\mathrm{d}v(g)\,.$$

(L'inégalité se généralise aux quotients de S^n par des groupes cycliques opérant librement.)

(2) Sur $S^1(T)\times S^{n-1}$, produit du cercle de rayon T et de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique produit,

$$\left(\int_X |u|^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g)\right)^{(n-2)/n} \leqslant \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}\left[\int_X |\nabla u|^2\,\mathrm{d}v(g)+\frac{1}{4}\left((n-2)^2+\frac{1}{T^2}\right)\int_X u^2\,\mathrm{d}v(g)\right].$$

Question 1. Ne serait-ce que sur $\mathbb{P}_n$, que vaut le meilleur B de (S2)? [On sait déjà qu'il est supérieur à $(2/\omega_n)^{2/n}$ mais inférieur à $(n+2)/(n-2)\omega_n^{2/n}$.]

Le probème symétrique consistant à préscrire dans (S1) le meilleur B possible, à savoir $\mathrm{vol}(g)^{-2/n}$, puis à estimer la meilleure constante A qui lui correspond est étudié par Ilias. Dans la réf. [50] il démontre entre autre le résultat suivant:

Théorème (Ilias [50]). *Si* $\mathrm{Ric}(g) \geqslant (n-1)\delta$, $\delta > 0$, *alors*

$$\left(\int_X |u|^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g)\right)^{(n-2)/n} \leqslant \frac{4}{n(n-2)\delta \mathrm{vol}(g)^{2/n}} \int_X |\nabla u|^2\,\mathrm{d}v(g) + \mathrm{vol}(g)^{-2/n} \int_X u^2\,\mathrm{d}v(g)\,.$$

Quant à l'inégalité totalement optimale

$$\left(\int_X |u|^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g)\right)^{(n-2)/n} \leqslant \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}} \int_X |\nabla u|^2\,\mathrm{d}v(g) + \mathrm{vol}(g)^{-2/n} \int_X u^2\,\mathrm{d}v(g)\,, \qquad \text{(S3)}$$

on sait (Aubin [3]) qu'elle est vérifiée sur la sphère S^n munie de sa métrique standard.

Question 2. (S3) caractérise-t-elle S^n ou existe-t-il d'autres variétés pour lesquelles elle est vérifiée?

Le résultat suivant apporte un premier élément de réponse.

Théorème (Hebey et Vaugon [45]). (X, g) *désignant une variété riemannienne compacte à courbure scalaire constante et* $\lambda_1(g)$ *désignant la première valeur propre* $(\neq 0)$ *de* Δ_g:

(1) Si $\lambda_1(g) > n(\omega_n/\mathrm{vol}(g))^{2/n}$, *(S3) est alors vérifiée dans un voisinage conique des fonctions constantes.*

(2) Réciproquement, si (S3) est vraie, alors $\lambda_1(g) \geqslant n(\omega_n/\mathrm{vol}(g))^{2/n}$.

En particulier, tous les quotients de S^n vérifient (S3) dans un voisinage conique des fonctions constantes. Reste qu'il est possible de montrer qu'ils ne peuvent pas tous la vérifier globalement (prendre $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, $u_k(z, z') = |z|^2$, $G_k = \{\sigma_k^j\}$, $\sigma_k(z, z') = e^{2i\pi/k}(z, z')$, $P_k = S^3/G_k$, $k \to \infty$).

3. Le théorème de la masse positive

Définition. Une variété riemannienne (X, g) est asymptotiquement plate d'ordre $\tau > 0$, s'il existe une décomposition de X de la forme $X = X_0 \cup X_\infty$ (avec X_0 compacte) et s'il existe un difféomorphisme $X_\infty \leftrightarrow \mathbb{R}^n - B(0, R)$, $R > 0$, la métrique g satisfaisant dans les coordonnées induites par le difféomorphisme:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \mathrm{O}(r^{-\tau}) , \quad \partial_k g_{ij} = \mathrm{O}(r^{-\tau-1}) , \quad \partial_{km} g_{ij} = \mathrm{O}(r^{-\tau-2}) .$$

[Pour abréger, on note $g_{ij} = \delta_{ij} + \mathrm{O}(r^{-\tau})$.] Ces coordonnées sont appelées "coordonnées asymptotiques".

A noter: Etant donnée (X, g) une variété riemannienne compacte, x un point de X et $\{y^i\}$ un système de coordonnées (normales) en x, $(X - \{x\}, g)$ est une variété asymptotiquement plate admettant pour coordonnées asymptotiques les $z^i = r^{-2} y^i$.

On considère maintenant (X, g) une variété asymptotiquement plate de dimension $n \geqslant 3$ et $\{z^i\}$ un système de coordonnées asymptotiques sur X.

Définition. Lorsque la limite existe, on définit la masse $m(g)$ de (X, g) en posant

$$m(g) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial B(0,R)} (H \rfloor \mathrm{d}z) ,$$

où H est le champ de vecteurs défini sur X_∞ par $H = \sum_{ij} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \partial_j$ ($\rfloor$ produit intérieur).

Théorème de le masse positive (forme forte, Schoen et Yau [81], Witten [93]). *Si* $\tau > (n-2)/2$ *et si* $\mathrm{Scal}(g) \in L^1(X)$ *est partout positive ou nulle, la masse* $m(g)$ *de* (X, g) *est parfaitement définie et on a toujours* $m(g) \geqslant 0$, *l'égalité n'ayant lieu que si* (X, g) *est isométrique à* $(\mathbb{R}^n, \xi)$ *(ξ désignant la métrique euclidienne).*

Soit maintenant (X, g) une variété riemannienne compacte localement conformément plate possédant une métrique conforme à courbure scalaire partout positive. Pour $x \in X$, et quitte à considérer une autre métrique de $[g]$, on suppose g euclidienne au voisinage de x. On note $\mathcal{G}_x$ la fonction de Green au point x de l'opérateur laplacien conforme $\mathbb{L}_g$. Cette fonction s'écrit au voisinage de x: $\mathcal{G}_x = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} / r^{n-2} + \alpha$, où α est une fonction C^∞. Il est alors possible de montrer (Lee et Parker [62], Schoen [77]) que la masse de la variété asymptotiquement plate $(X - \{x\}, \mathcal{G}_x^{4/(n-2)} g)$ est positivement proportionnelle à $\alpha(x)$. Autrement dit: il existe $K > 0$ telle que $m(\mathcal{G}_x^{4/(n-2)} g) = K\alpha(x)$.

Théorème de la masse positive (forme faible, Schoen et Yau [82]). *On a toujours $\alpha(x) \geqslant 0$, l'égalité n'ayant lieu que si $X = S^n$.*

Dans Hebey et Vaugon [44], une caractérisation fonctionnelle de $\alpha(x)$ est obtenue. A savoir:

$$\alpha(x) = \operatorname{Sup} \frac{4(n-1)}{(n-2)} \left(\frac{1}{\int_X \operatorname{Scal}(g')\, dv(g')} - \frac{1}{4(n-1)\omega_{n-1}\rho^{n-2}} \right),$$

où le sup est pris sur les $0 < \rho \ll 1$ et sur les $g' \in [g]$, euclidiennes sur $B(x; \rho)$, qui vérifient $g'(x) = g(x)$.

4. Le problème de Nirenberg

(S^n, g_0) désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa métrique standard induite de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour ne pas trop alourdir les notations on note Δ le laplacien de g_0 (au lieu de Δ_{g_0}). La courbure scalaire $\operatorname{Scal}(g_0)$ de g_0 vaut $n(n-1)$. Le problème consiste ici à déterminer les fonctions f C^∞ numériques définies sur S^n qui sont courbures scalaires de métriques conformes à g_0. Si on écrit ces métriques conformes sous la forme $u^{4/(n-2)}g_0$, avec $u > 0$, le problème admet la traduction suivante: Pour quelles fonctions f de $C^\infty(S^n)$ existe-t-il $u \in C^\infty(S^n)$, $u > 0$, vérifiant

$$\Delta u + \tfrac{1}{4}n(n-2)u = f u^{(n+2)/(n-2)} . \tag{E1}$$

Il est déjà facile de constater que f doit nécessairement être strictement positive quelque part sur S^n. Pour le voir il suffit de multiplier (E1) par u et d'intégrer.

Reste que toutes ces fonctions ne sont quand même pas courbures scalaires de métriques conformes à g_0. La première obstruction fût trouvé par Kazdan et Warner [57]. Leur résultat stipule qu'une fonction f pour laquelle (E1) admet une solution $u > 0$ vérifie forcément

$$\int_{S^n} (\nabla f \nabla \xi) u^{2n/(n-2)}\, dv(g_0) = 0 , \quad \forall \xi \text{ harmonique sphérique} \tag{1}$$

[i.e., pour toute fonction ξ première fonction propre de Δ, à savoir en fait pour toute restriction à S^n des formes linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$; lues sur S^n, les harmoniques sphériques sont du type $\cos r$ où r désigne la distance géodésique à un point quelconque de S^n]. En particulier, les fonctions du type $C^{te} + \xi$, ξ harmonique sphérique, ne sont pas la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0, même si ces fonctions peuvent être choisies aussi proche que l'on veut des constantes qui sont trivialement courbures scalaires de métriques conformes à g_0 (imposant ainsi à toute méthode de résolution une précision suffisamment fine qui tienne compte de ce défaut de "continuité"). De façon plus générale, si $C(S^n)$ désigne le groupe des transformations conformes de S^n, les fonctions du type $C^{te}+\xi\circ\phi$, ξ harmonique sphérique, $\phi\in C(S^n)$, ne réalisent pas non plus la courbure scalaire de métriques conformes à g_0 (les $\xi\circ\phi$ sont les premières fonctions propres des métriques canoniques de S^n), tout simplement parce que si f est courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0, alors $f\circ\phi$ l'est aussi [quelque soit $\phi\in C(S^n)$].

L'obstruction la plus générale (tenant compte de cette remarque) a été trouvée par Bourguignon et Ezin [19].

Théorème (Bourguignon et Ezin [19]). *Si $f=\mathrm{Scal}(u^{4/(n-2)}g_0)$, alors*

$$\int_{S^n} X(f)u^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g_0)=0 \tag{2}$$

pour tout champ de vecteurs conforme X. En particulier, il existe des fonctions f pour lesquelles (1) est satisfaite mais qui ne satisfont pas (2).

L'autre difficulté véhiculée par le problème de Nirenberg provient de ce que la méthode variationnelle ne peut pas fonctionner dans ce cadre précis. En d'autres termes, il est possible de montrer que le minimum de la fonctionnelle $I(u)$ sur l'ensemble A des $u>0/\int fu^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g_0)=1$ n'est jamais atteint, sauf si f est constante. [On rappelle que l'équation d'Euler de cette fonctionnelle correspond à l'équation (E1). Les $u>0$ pour lesquelles $f=\mathrm{Scal}(u^{4/(n-2)}g_0)$ sont les points critiques de I sur A.] Les points critiques de $I_{/A}$, qui fournissent les métriques conformes à g_0 ayant f pour courbure scalaire, devront donc être recherchés dans des niveaux supérieurs. Pour le voir on utilise simultanément:

(1) $\mathrm{Inf}\,J(u)=\frac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}$ et $\mathrm{Inf}_A\,I(u)\leqslant n(n-2)\omega_n^{2/n}/4(\mathrm{Sup}\,f)^{(n-2)/n}$ (Aubin [1]).

(2) Si u_0 réalise $\mathrm{Inf}\,J(u)$ alors $u_0^{4/(n-2)}g_0$ est homothétique à une métrique canonique (Obata [71]).

(3) $\mathrm{Inf}\,J(u)/(\mathrm{Sup}\,f)^{(n-2)/n}\leqslant\mathrm{Inf}_A\,I(u)$.

[Avec (3) et (1), si u_0 réalise $\mathrm{Inf}_A\,I(u)$ alors u_0 réalise $\mathrm{Inf}\,J(u)$. De plus, u_0 réalisant $\mathrm{Inf}_A\,I(u)$, $f=\mathrm{Scal}(u_0^{4/(n-2)}g_0)$. (2) impose alors $f=C^{te}$.]

Face à ces difficultés, et en particulier pour aller chercher des niveaux critiques supérieurs de $I_{/A}$, deux approches sont développées. L'une à rapprocher des travaux de Moser sur S^2 [70], l'autre à rapprocher des travaux de Eells et Sampson [33].

Dans l'une on demande ainsi à f d'être invariante sous l'action d'un groupe G d'isométries de S^n. Lorsque le groupe G opère librement (i.e., si G est fini et si toutes les orbites de G ont exactement card G points) le quotient $X=S^n/G$ est une variété. En notant g la métrique sur X induite par g_0 et en notant f' la fonction f quotientée sur X, résoudre (E1) sur S^n revient alors à résoudre sur X

l'équation

$$\Delta_g u + \tfrac{1}{4}n(n-2)u = f' u^{(n+2)/(n-2)}, \quad u>0\,. \tag{E'1}$$

Ce phénomène a motivé les travaux de Escobar et Schoen [34] sur la question. Via l'invariance sous l'action d'un groupe opérant librement, Escobar et Schoen ramènent ainsi le problème de Nirenberg à un problème de courbure scalaire prescrite (étudié au paragraphe 5). L'avantage de cette approche provient de ce que le minimum de la fonctionnelle $I_{/A}$ sur X peut maintenant être atteint. (Le niveau critique minimum de la fonctionnelle sur X correspond à un niveau critique supérieur de la fonctionnelle sur S^n.) En d'autres termes, Escobar et Schoen récupèrent la méthode variationnelle (et le théorème fondamental de Aubin [3] relatif à cette méthode – théorème dont nous parlerons au paragraphe suivant). Autre avantage: l'équation (E′1) sur X ne véhicule plus les obstructions du type "Kazdan–Warner" (cf. plus haut).

Escobar et Schoen parviennent ainsi à démontrer (cf. la réf. [34]), que *toute fonction* C^∞ *sur* S^3, *strictement positive quelque part et invariante sous l'action d'un groupe non trivial d'isométries de* S^3 *opérant librement, est la courbure scalaire d'une métrique conforme à* g_0. Ceci-dit, notons que l'hypothèse "G opère librement" est assez restrictive, notamment parce que sur S^{2n} le seul groupe qui opère librement est le groupe de Moser, groupe constitué de l'identité et de l'isométrie antipodale $x \to -x$.

C'est en fait la notion de point de concentration (de suites sous-critiques) qui va permettre de se débarrasser de cette hypothèse encombrante. De façon plus précise, on commence par établir que pour tout $1<q<2n/(n-2)$, il existe $u_q>0$, C^∞ et G-invariante, obtenue par la méthode variationnelle, vérifiant $\int f u_q^q \,\mathrm{d}v(g_0)=1$ et solution d'une équation (E1) où l'exposant $(n+2)/(n-2)$ est remplacé par $q-1$ [f est aussi multipliée par $I(u_q)$]. L'existence d'une telle suite sous-critique ne pose aucun véritable problème en raison de la compacité fournie par le théorème de Kondrakov [$q<2n/(n-2)$]. Le premier objectif est alors de caractériser la façon dont cette "suite" peut diverger lorsque $q\to 2n/(n-2)$ (G est absolument quelconque, il peut être réduit à l'identité ou infini). Disons pour simplifier qu'il existe au pire un nombre fini de points de S^n, les points de concentrations, tous points critiques de f, en lesquels u_q^q se comporte comme une mesure de Dirac, la suite u_q convergeant vers zéro en dehors de ces points (cf. Hebey [41,43]). L'idée essentielle est maintenant qu'on peut estimer le nombre maximal de points de concentration autorisés, puis conclure par l'absurde en imposant un trop grand nombre de tels points via l'invariance sous G. On obtient ainsi:

Théorème (Hebey [41,43]). *Une fonction* C^∞ *sur* S^3, *strictement positive quelque part et invariante sous l'action d'un groupe d'isométries de* S^3 *opérant sans point fixe, est la courbure scalaire d'une métrique conforme à* g_0.

Par "G opère sans point fixe" on entend ici que l'orbite de tout point est au moins composée de deux éléments. Il est à noter que cette hypothèse est optimale, comme le montre le cas des fonctions du type $C^{te}+\xi$, ξ harmonique sphérique.

Dans les deux résultats cités, la restriction à S^3 est en fait imposée par des considérations techniques. (Les résultats se généralisent aux dimensions supérieures mais avec des conditions de platitude imposées à f.) Cette restriction à S^3 qui apparait comme technique dans les démonstrations l'est elle effectivement? En d'autre termes:

Question 3. Le résultat du théorème reste-t-il vrai sur S^n, $n \geqslant 4$?

A noter ici: Les fonctions invariantes sous l'action d'un groupe d'isométries opérant sans point fixe ne rentrent jamais dans les conditions du théorème d'obstruction de Bourguignon et Ezin, tout simplement parce qu'à tout f de ce type, on peut associer une constante $k \gg 1$ de sorte que $f+k$ soit courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0. (Appliquer le corollaire 1, p. 217 de Hebey [41].) On peut aussi montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que toute fonction f de $C^\infty(S^4)$, strictement positive quelque part et invariante sous l'action d'un groupe d'isométries de S^4 opérant sans point fixe, est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0 dès que $\|f-1\|_{C^2} < \epsilon$. (Appliquer le théorème 6 de Hebey [41]; cf. aussi Chang et Yang [27].)

L'autre approche dont nous avons parlé est essentiellement développée dans Bahri et Coron [12] (mais cf. aussi les réfs. [11,23,32]). Si

$$H(u) = \frac{1}{3}\left(\int_{S^3} f(x) u^6 \, dv(g_0) \right)^{-1/2}$$

et si

$$\Sigma^+ = \{ u \geqslant 0 / \textstyle\int_S \mathbb{L}_{g_0}(u) u \, dv(g_0) = 1 \} ,$$

les auteurs analysent tout d'abord la perte de compacité qui survient lorsque l'on suit les lignes de gradient de H dans Σ^+ (à savoir les solutions de $du/ds = -H'(u)$, $u(0) \in \Sigma^+$). Sans rentrer dans trop de détails, cette étude introduit une notion de point de concentration, les $u(s)$ se comportant H_1^2 comme des

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \alpha_i(s) \lambda_i(s) [1 + \lambda_i(s)^2 + (\lambda_i(s)^2 - 1) \cos d(a_i(s), x)]^{-1/2} ,$$
$$\alpha_i(s), \lambda_i(s) \in \mathbb{R},\ a_i(s) \in S^3 .$$

Le cas $p \geqslant 2$ est alors éliminé (signifiant qu'il y a au plus un point de concentration). Si $a = \lim a_1(s)$, les cas $\nabla f(a) \neq 0$ et $\nabla f(a) = 0, \Delta f(a) < 0$ sont ensuite écartés (en particulier, le point de concentration est forcément un point critique de f). L'étude du cas $\nabla f(a) = 0, \Delta f(a) > 0$ nécessite l'introduction d'un pseudo-gradient au voisinage de l'infini. Bahri et Coron obtiennent ainsi le résultat suivant où les hypothèses d'invariance par isométries sont remplacées par des hypothèses sur les points critiques de f.

Théorème (Bahri et Coron [12]). *Soit f une fonction strictement positive de $C^\infty(S^3)$, n'ayant que des points critiques non dégénérés $a_1, \ldots, a_k$ avec $\Delta f(a_i) \neq 0$, $\forall i$. f est alors la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0 si $\sum_{a_i/\Delta f(a_i)>0} (-1)^{k_i} \neq -1$, où k_i désigne l'indice de Morse de f en a_i. (Un résultat sur S^4 est aussi obtenu, cf. appendice C de la réf. [12].)*

Ce résultat est encore optimal en ce sens que les fonctions $C^{te} + \xi$, où ξ est une harmonique sphérique, ont un nombre fini de points critiques (deux), tous non dégénérés, leur laplacien en ces points n'étant jamais nul.

Les fonctions radiales qui ne sont ni strictement croissantes, ni strictement décroissantes (à savoir celles qui sont autorisées par les obstructions), ne sont pas traitées par les deux théorèmes cités jusqu'à présent. (D'une part le groupe sous lequel elles sont invariantes possède un point fixe, d'autre part elles ont forcément un nombre infini de points critiques.) Pour ces fonctions, notons P et $-P$ leurs pôles, les principaux résultats sont les suivants: *Lorsque $n=3$, si*

$$\mathrm{Max}(f(P), f(-P)) \leqslant \tfrac{1}{4} \mathrm{Sup}\, f,$$

où pour $n \geqslant 3$ si

$$\mathrm{Max}(f(P), f(-P)) \leqslant \omega_n^{-1} \int f(x)\, \mathrm{d}v(g_0),$$

f est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0. Lorsque $n \geqslant 4$, si $f(P) \geqslant f(-P)$ et si $\Delta f(P) < 0$, f est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0 (cf. Hebey [41,43] et Vaugon [91]). L'équation (E) se simplifie pourtant considérablement lorsque les fonctions f et u sont radiales, devenant une équation sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ (avec conditions au bord).

Question 4. Peut-on caractériser les fonctions radiales sur S^n, $n \geqslant 3$, qui sont courbures scalaires de métriques conformes à g_0?

On note maintenant Can l'ensemble des métriques conformes à g_0, qui sont à courbure sectionnelle constante $+1$, à savoir l'ensemble des métriques canoniques de S^n. Can est constitué des métriques $\phi * g_0$ où $\phi \in C(S^n)$. Pour $g \in \mathrm{Can}$, on note $\Lambda_g(S^n)$ l'espace des premières fonctions propres du laplacien de g. Comme nous l'avons déjà signalé, pour tout $h \in \Lambda_g(S^n)$, $g \in \mathrm{Can}$, les fonctions du type $C^{te} + h$ ne sont pas la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0. Face à ce phénomène il serait intéressant, voire rassurant, de pouvoir montrer qu'à toute fonction f de $C^\infty(S^n)$ on peut associer $h(f)$ une première fonction propre d'une métrique canonique de sorte que $f-h(f)$ soit la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0. Le premier à avoir traité de cette question est Aubin. Dans la réf. [5], il montre qu'on peut toujours trouver cette fonction $h(f)$ [de façon plus précise dans $\Lambda_{g_0}(S^n)$] soit lorsque $n=2$, soit lorsque f est suffisamment proche de 1.

A savoir: *Pour $n \geqslant 3$, f désignant une fonction C^∞ strictement positive sur S^n, il existe $h(f) \in \Lambda_{g_0}(S^n)$ de sorte que $f-h(f)$ soit la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0 si* $\operatorname{Sup} f < 4^{1/(n-2)} \operatorname{Inf} f$.

En 1986 le problème a été repris par Bourguignon et Ezin [19], ces deux auteurs soulignant l'importance du rôle joué par le groupe des transformations conformes.

Théorème (Hebey [42]). *A toute fonction f de $C^\infty(S^n)$, $n \geqslant 3$, strictement positive quelque part, on peut associer $h(f)$ une première fonction propre d'une métrique canonique de sorte que $f-h(f)$ soit la courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0.*

Question 5. Par analogie avec le cas $n=2$, est-il possible de se restreindre aux fonctions de $\Lambda_{g_0}(S^n)$, $n \geqslant 3$?

Question 6 (Aubin [1]). Peut-on calculer (une des) $h(f)$ en fonction de f?

A noter: Si $f \in C^\infty(S^3)$ est symétrique en un de ses maximums (i.e., s'il existe $x \in S^3$ tel que $f(x) = f(-x) = \operatorname{Sup} f$), on peut choisir $h(f)$ dans $\Lambda_{g_0}(S^3)$ (Hebey [42]). Si $f \in C^\infty(S^3)$ est globalement symétrique $[f(x) = f(-x),\ \forall x]$, on peut poser $h(f) = 0$ (Escobar et Schoen [34]).

Dans la réf. [19], Bourguignon et Ezin démontraient le résultat de densité suivant: Sur S^2, toute fonction strictement positive quelque part peut être approchée au sens L^p, $p > 1$, par des fonctions qui sont courbure scalaire de métrique conformes à g_0. En fait, avec les résultats des réfs. [34] ou [41], sans rien changer à leur démonstration, cette densité a encore lieu sur S^n, $n \geqslant 3$.

Théorème (Bourguignon et Ezin [19]). *Soit f une fonction de $C^\infty(S^n)$, strictement positive quelque part. Pour tout $p > 1$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $h \in C^\infty(S^n)$, courbure scalaire d'une métrique conforme à g_0, vérifiant $\|f-h\|_p < \epsilon$.*

Récemment, Li a annoncé un résultat en petite dimension qui a pour corollaire immédiat la densité C^0 (nous reviendrons sur le théorème général au paragraphe 8).

Théorème (Li [67]). *Si $n=3$ ou 4, toute fonction strictement positive de $C^\infty(S^n)$ peut être uniformément approchée par des fonctions qui sont courbure scalaire de métriques conformes à g_0.*

Question 7. Quel type de densité a-t-on sur S^n, $n \geqslant 3$?

5. Le problème de courbure scalaire prescrite

Ce problème est l'analogue du problème de Nirenberg, mais posé sur une variété non conformément difféomorphe à la sphère. Si (X, g) désigne une telle variété, il s'agira de déterminer les fonctions de $C^\infty(X)$ qui sont courbure scalaire d'une métrique conforme à g. Ou encore, cf. chapitre 1, de déterminer les f de $C^\infty(X)$ pour lesquelles il existe $u \in C^\infty(X)$, $u > 0$, vérifiant

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}(g) u = f u^{(n+2)/(n-2)}. \tag{E2}$$

Sans perdre en généralité, par un changement conforme de la métrique, on suppose que $\operatorname{Scal}(g) < 0$, $\operatorname{Scal}(g) = 0$ ou $\operatorname{Scal}(g) > 0$ (selon le signe du minimum de la fonctionnelle J, cf. Aubin [1]). Si $\operatorname{Scal}(g) < 0$, il est alors nécessaire que $\int_X f(x)\, dv(g) < 0$. Si $\operatorname{Scal}(g) = 0$, il faut que $\int_X f(x)\, dv(g) < 0$ et que f soit strictement positive quelque part. Si $\operatorname{Scal}(g) > 0$ il faut que f soit strictement positive quelque part. Ces conditions s'obtiennent respectivement en multipliant (E2) par $u^{-(n+2)/(n-2)}$ et u, puis en intégrant. On suppose ces conditions nécessaires satisfaites.

A priori, et contrairement au problème de Nirenberg, ce problème ne véhicule plus d'obstructions.

(a) *Le cas* $\operatorname{Scal}(g) < 0$. Il y a tout d'abord le résultat suivant.

Théorème (Aubin [3]). *Toute fonction strictement négative de $C^\infty(X)$ est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g. Cette métrique est en plus unique.*

L'unicité vient du principe du maximum. L'existence est assurée par la méthode variationnelle, le minimum de la fonctionnelle I sur l'ensemble des $u > 0$ tels que $\int_X f(x) u^{2n/(n-2)}\, dv(g) = -1$ étant atteint. (Pour plus de détails, cf. Aubin [3].) Si par contre f s'annule ou change de signe, le fonctionnement de la méthode n'est plus assuré. En particulier, il existe des fonctions changeant de signe qui ne sont pas la courbure scalaire d'une métrique conforme à g (Kazdan et Warner [57]).

Théorème (Ouyang [72], Rauzy [76], Vazquez et Véron [92]). *$f \leqslant 0$ est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g si l'ensemble de ses zéros est de mesure nulle.*

Dans le cas où f change de signe des résultats ont été obtenus par Rauzy [76]. En particulier (cf. la ref. [76] mais aussi la réf. [72]), des phénomènes de multiplicités surprenants apparaissent.

Question 8. Caractériser les fonctions changeant de signe qui sont courbure scalaire d'une métrique conforme à g. Lesquelles sont courbure scalaire de plusieurs métriques conformes distinctes?

Théorème (Rauzy [76]). *(X, g) désigne une variété riemannienne compacte à courbure scalaire constante négative (cf. paragraphe 6). Pour $f \in C^\infty(X)$, on pose*

$$\lambda_f = \operatorname{Inf} \frac{\int_X |\nabla u|^2 \, dv(g)}{\int_X u^2 \, dv(g)},$$

où l'inf est pris sur les $u \geq 0$ de $H_1^2(X)$, $u \neq 0$, vérifiant $\int_{f<0} u \, dv(g) = 0$. Il existe alors une constante $C > 0$ (dépendant de $f^- = \operatorname{Inf}(f, 0)$) de sorte que toute $f \in C^\infty(X)$ qui vérifie

$$\int_X f(x) \, dv(g) < 0, \tag{i}$$

$$|\operatorname{Scal}(g)| < \frac{4(n-1)}{n-2} \lambda_f, \tag{ii}$$

$$(\operatorname{Sup} f) < C \int_X |f^-| \, dv(g), \tag{iii}$$

est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g. Sous certaines conditions, f est la courbure scalaire de plusieurs métriques distinctes conformes à g.

Signalons enfin ce résultat du à Kazdan et Warner.

Théorème (Kazdan et Warner [57]). *Si $f \in C^\infty(X)$ est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g et si $h \in C^\infty(X)$ vérifie $h \leq f$, h est aussi la courbure scalaire d'une métrique conforme à g.*

(b) *Les cas* $\operatorname{Scal}(g) = 0$ *et* $\operatorname{Scal}(g) > 0$. Le théorème suivant est le théorème de base. On note

$$A = \{u \in H_1^2(X), u > 0 / \int_X f(x) u^{2n/(n-2)} \, dv(g) = 1\}.$$

Théorème (Aubin [3]). *Si*

$$\operatorname{Inf}_A I(u) < \frac{n(n-2)\omega_n^{2/n}}{4(\operatorname{Sup} f)^{(n-2)/n}}, \tag{$*$}$$

il existe alors une fonction $u>0$ de A qui réalise l'inf de I sur A, et f est bien la courbure scalaire d'une métrique conforme à g.

L'ingrédient principal de sa démonstration est la connaissance de la valeur optimale de la première constante de l'inégalité de Sobolev (S1) (cf. paragraphe 2). Sans rentrer dans trop de détails, on démontre tout d'abord, avec la compacité fournie par le théorème de Kondrakov, l'existence de suites minimisantes sous-critiques (u_q), $u_q>0$, $q<2n/(n-2)$, vérifiant

$$\Delta_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}(g) u_q = \lambda_q f(x) u_q^{q-1} ,$$

$$\int_X f(x) u_q^q \, \mathrm{d}v(g) = 1 ,$$

$$\lim_{q \to 2n/(n-2)} \lambda_q \leqslant \operatorname{Inf}_A I(u) .$$

Sans perdre en généralité, on peut maintenant supposer que (u_q) converge faiblement dans H_1^2 et fortement dans L^2 vers une fonction u. Il est alors possible de montrer que u est soit identiquement nulle, soit partout strictement positive, réalisant, dans ce dernier cas, la minimum de la fonctionnelle I sur A. Reste ainsi à montrer que u n'est pas identiquement nulle. C'est là que l'inégalité de Sobolev intervient de façon fondamentale, en remarquant que

$$\left(\int_X u_q^{2n/(n-2)} \, \mathrm{d}v(g) \right)^{(n-2)/n} \leqslant A \int_X |\nabla u_q|^2 \, \mathrm{d}v(g) + B \int_X u_q^2 \, \mathrm{d}v(g)$$

entraine

$$1 \leqslant A \, (\operatorname{Sup} f)^{(n-2)/n} \operatorname*{Inf}_A I(u) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \int_X u^2 \, \mathrm{d}v(g) .$$

(Pour plus de détails, cf. Aubin [3].)

A noter: On a toujours $\operatorname{Inf}_A I(u) \leqslant n(n-2)\omega_n^{2/n}/4(\operatorname{Sup} f)^{(n-2)/n}$ (cf. Aubin [3]).

Avec ce théorème, le problème se ramène à mettre en évidence des fonctions tests $u_0 \in A$ pour lesquelles $I(u_0) < n(n-2)\omega_n^{2/n}/4(\operatorname{Sup} f)^{(n-2)/n}$. Dans le cas $\operatorname{Scal}(g) > 0$, en considérant la fonction $u_0 = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, on voit déjà que *si*

$$(\operatorname{Sup} f)^{(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g) \, \mathrm{d}v(g) \leqslant n(n-1)\omega_n^{2/n} \left(\int_X f(x) \, \mathrm{d}v(g) \right)^{(n-2)/n} ,$$

f est alors la courbure scalaire d'une métrique conforme à g (Aubin [3]).

Lorsque la variété est localement conformément plate à courbure scalaire strictement positive, on considère une métrique $g' \in [g]$ euclidienne au voisinage d'un point x où f atteint son maximum. Les fonctions test de Escobar et Schoen [34] s'obtiennent en prolongeant les fonctions test de Aubin [3] en $(\epsilon + r'^2)^{1-n/2}$ par la fonction de Green au point x de l'opérateur laplacien conforme $\mathbb{L}_{g'}$ (via une condition de raccord). L'inégalité $(*)$ est alors obtenue avec la forme faible du théorème de la masse positive (cf. paragraphe 3), les conditions de platitudes imposées à f permettent d'aller récupérer $\alpha(x)$. Sous les mêmes hypothèses, mais si $\mathrm{Scal}(g) = 0$, la fonction de Green est remplacée par une fonction positive v_0 satisfaisant $\mathbb{L}_{g'}(v_0) = 0$.

Théorème (Escobar et Schoen [34]). *La variété (X, g) étant localement conformément plate, mais non conformément difféomorphe à la sphère, une fonction f de $C^\infty(X)$ est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g si elle vérifie*

(1) $\mathrm{Sup}\, f > 0$ *et* $\int_X f(x)\, \mathrm{d}v(g) < 0$ *si* $\mathrm{Scal}(g) = 0$,

(2) en (au moins) un point où elle est maximale, ses dérivées sont nulles jusqu'à l'ordre $n-3$ si $\mathrm{Scal}(g) = 0$, *et jusqu'à l'ordre $n-2$ si* $\mathrm{Scal}(g) > 0$.

En dimension 3 lorsque $\mathrm{Scal}(g) > 0$, et en dimensions 3 et 4 lorsque $\mathrm{Scal}(g) = 0$, l'hypothèse "g est localement conformément plate" peut être supprimée, de sorte que les conditions nécessaires deviennent aussi suffisantes.

Théorème (Escobar et Schoen [34]). *Si $n = 3$ et si* $\mathrm{Scal}(g) > 0$, *toute fonction de* $C^\infty(X)$, $X \neq S^3$, *strictement positive quelque part, est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g. Si $n = 3$ ou 4 et si* $\mathrm{Scal}(g) = 0$, *toute fonction de* $C^\infty(X)$ *strictement positive quelque part et vérifiant* $\int_X f(x)\, \mathrm{d}v(g) < 0$, *est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g.*

Si la variété n'est pas localement conformément plate, les fonctions test de Aubin [3] en $(\epsilon + r^2)^{1-n/2}$ permettent d'obtenir le théorème suivant. L'idée est la même que celle utilisée dans la réf. [3]. Il s'agit de poursuivre le développement limité.

Théorème (Aubin et Hebey [7]). *(X, g) n'étant pas localement conformément plate, on pose* $W = \{x \in X / \mathrm{Weyl}(g)(x) \neq 0\}$. *Lorsque $n = 6$, toute fonction de* $C^\infty(X)$ *qui atteint son maximum strictement positif en un point x de W avec $\Delta f(x) = 0$, est la courbure scalaire d'une métrique conforme à g. En dimension $n \geq 7$, on suppose en plus que $|\Delta\Delta f(x)| / f(x)$ est suffisamment petit. Dans le cas* $\mathrm{Scal}(g) = 0$, *f doit satisfaire* $\int_X f(x)\, \mathrm{d}v(g) < 0$.

Du moins lorsque $\mathrm{Scal}(g) > 0$, ces théorèmes peuvent être regroupés en un énoncé plus général. Si x est un point de X, on définit $\omega(x)$ comme étant le plus petit entier k pour lequel $\nabla^k \mathrm{Weyl}(g)(x) \neq 0$ ($\nabla^k = \nabla \circ \cdots \circ \nabla$ k fois). Par convention,

$\omega(x)=0$ si $\mathrm{Weyl}(g)(x)\neq 0$, et $\omega(x)=\infty$ si $\nabla^i\mathrm{Weyl}(g)(x)=0$ pour tout i. (En particulier, $\omega(x)=\infty$ si g est localement conformément plate.) On pose $q(x)=\mathrm{Inf}\{\omega(x), E((n-6)/2)\}$, où $E((n-6)/2)$ désigne la partie entière de $(n-6)/2$. (On écrit Δ au lieu de Δ_g.)

Théorème (Hebey et Vaugon [47]). *Soit (X, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n\geqslant 3$, $X\neq S^n$, $\mathrm{Scal}(g)>0$, et soit f une fonction de $C^\infty(X)$ vérifiant $\mathrm{Sup}\, f>0$. Si $n=3$, f est toujours courbure scalaire d'une métrique conforme à g (il s'agit du résultat de Escobar et Schoen [34]), tandis que pour $n\geqslant 4$, f est courbure scalaire d'une métrique conforme à g si, en au moins un point x où elle est maximale, les conditions suivantes sont vérifiées:*

(1) $\omega(x)\leqslant 2$ ou $\omega(x)>E((n-6)/2)$,

(2) $\Delta^i f(x)=0$ pour tout $1\leqslant i\leqslant q(x)+2$ lorsque $\omega(x)\neq(n-6)/2$, $\Delta^i f(x)=0$ pour tout $1\leqslant i\leqslant \frac{1}{2}(n-4)$ lorsque $\omega(x)=(n-6)/2$. (Pour $n=4$ ou 5, $q(x)=-1$, l'unique condition est $\Delta f(x)=0$. Le plus souvent, la nullité de la dernière itérée du laplacien de f en x n'est pas obligatoire; il suffira en fait que le rapport de cette itérée avec $f(x)$ soit petit en valeur absolue. La condition (1) doit pouvoir être supprimée. Elle est automatiquement vérifiée pour $n\geqslant 11$.)

Ce théorème utilise la forme forte du théorème de la masse positive (cf. paragraphe 3). Les fonctions test sont celles utilisées dans Hebey et Vaugon [46].

A noter: L'ensemble des fonctions qui sont courbure scalaire de métriques conformes à g est C^1 dense dans l'ensemble des fonctions de $C^\infty(X)$ qui sont strictement positive quelque part.

Question 9. Les conditions nécessaires, à savoir $\mathrm{Sup}\, f>0$ si $\mathrm{Scal}(g)>0$, $\mathrm{Sup}\, f>0$ et $\int_X f(x)\, dv(g)<0$ si $\mathrm{Scal}(g)=0$, ne seraient-elles pas aussi suffisantes?

6. Le problème de Yamabe

Toute variété riemannienne compacte possède une métrique dans sa classe conforme qui est à courbure scalaire constante. Ou encore (cf. paragraphe 1), pour toute variété compacte donnée (X, g), il existe $u\in C^\infty(X)$, $u>0$ solution de l'équation

$$\Delta_g u+\frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{Scal}(g)u=C^{te}u^{(n+2)/(n-2)}. \tag{E3}$$

Ce résultat fut annoncé en 1960 par Yamabe [94], via la convergence de suites sous-critiques minimisantes (u_q), $q\to 2n/(n-2)$, les $u_q>0$ étant solutions de

$$\Delta_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}(g) u_q = \lambda_q u_q^{q-1}, \quad \lambda_q \in \mathbb{R},\ q < \frac{2n}{n-2},$$

$$\int_X u_q^q \, \mathrm{d}v(g) = 1 .$$

Malheureusement sa démonstration était imparfaite. Reste qu'on pouvait facilement la rattraper lorsque $\operatorname{Inf}_{u>0} J(u) \leqslant 0$, à savoir lorsqu'il existe $g' \in [g]$ vérifiant $\operatorname{Scal}(g') \leqslant 0$ (cf. Trudinger [87] et le paragraphe 1 pour les notations). Le cas $\operatorname{Inf}_{u>0} J(u) > 0$ apparut par contre très vite comme étant le cas réellement délicat. [A noter: $\operatorname{Inf}_{u>0} J(u) > 0 \Leftrightarrow \exists g' \in [g]/\operatorname{Scal}(g') > 0$.] Il fallut en fait attendre 1976 et les travaux de Aubin [3] pour qu'apparaisse le théorème fondamental autorisant sa résolution. Ce théorème, déjà rencontré au chapitre précédent, définissait de façon très précise l'approche à adopter, ramenant le problème à des calculs d'éstimées sur la fonctionnelle J. Il est à la base des travaux de Aubin [3] et Schoen [77].

Théorème (Aubin [3]). *Si* $\operatorname{Inf}_{u>0} J(u) < \frac{1}{4} n(n-2) \omega_n^{2/n}$, *l'inf est atteint et il existe une métrique conforme à g qui est à courbure scalaire constante. L'inégalité large est toujours vérifiée (on a toujours* $\operatorname{Inf}_{u>0} J(u) \leqslant \frac{1}{4} n(n-2) \omega_n^{2/n}$*), l'égalité a lieu sur* (S^n, g_0).

Voici les grandes lignes de la démonstration (pour plus de détails, cf. Aubin [1] ou [3]). On commence, avec le théorème de Kondrakov, par établir l'existence de suites minimisantes sous-critiques (u_q), $q < 2n/(n-2)$, $u_q > 0$, vérifiant

$$\Delta_g u_q + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}(g) u_q = I(u_q) u_q^{q-1},$$

$$\int_X u_q^q \, \mathrm{d}v(g) = 1, \qquad I(u_q) = \operatorname*{Inf}_{u>0, \int u^q = 1} I(u) .$$

On démontre ensuite

(1) que $\lim_{q \to 2n/(n-2)} I(u_q) = \operatorname{Inf}_{u>0} J(u)$,

(2) qu'une fonction u non identiquement nulle de $H_1^2(X)$, limite dans L^2 d'une sous suite de (u_q), est C^∞ partout strictement positive, solution de l'équation (E3) et réalise le minimum de J.

Si $v > 0$ est choisie de sorte que $J(v) \leqslant \operatorname{Inf}_{u>0} J(u) + \epsilon$, on obtient déjà

$$\lim_{q \to 2n/(n-2)} I(u_q) \leqslant \lim_{q \to 2n/(n-2)} I(v/(\textstyle\int v^q)^{1/q}) = J(v) ,$$

donc (1) en remarquant que

$$\operatorname*{Inf}_{u>0} J(u) \leqslant \left(\int_X \mathrm{d}v(g) \right)^{\alpha} I(u_q) \ , \quad \alpha = \frac{n-2}{2} \left(\frac{2n}{n-2} - q \right) .$$

Pour (2) on peut supposer que u est limite faible dans $H_1^2(X)$ de (u_q). Par suite:

$$I(u) \leqslant \lim_{q \to 2n/(n-2)} I(u_q) = \operatorname*{Inf}_{u>0} J(u) \ .$$

D'autre part, puisque les u_q sont solutions d'équations sous-critiques, u est une solution faible de l'équation (E3) [où la constante vaut $\lim_{q \to 2n/(n-2)} I(u_q)$]. u est ainsi forcément C^∞ (théorèmes de régularité), soit identiquement nulle soit partout strictement positive (principe du maximum). Dans ce dernier cas,

$$\begin{aligned}
\int_X u^{2n/(n-2)} \, \mathrm{d}v(g) &= \lim_{q \to 2n/(n-2)} \int_X u_q^{(n+2)/(n-2)} u \, \mathrm{d}v(g) \\
&\leqslant \lim_{q \to 2n/(n-2)} \left(\int_X u_q^q \, \mathrm{d}v(g) \right)^{(n+2)/q(n-2)} \\
&\quad \times \left(\int_X u^{q/(q-(n+2)/(n-2))} \, \mathrm{d}v(g) \right)^{(q-(n+2)/(n-2))/q} \\
&= \left(\int_X u^{2n/(n-2)} \, \mathrm{d}v(g) \right)^{(n-2)/2n} ,
\end{aligned}$$

et u réalise le minimum de la fonctionnelle J. On le voit en multipliant (E3) par u et en intégrant. [$\int_X u^{2n/(n-2)} \, \mathrm{d}v(g) \leqslant 1$ et $\lim_{q \to 2n/(n-2)} I(u_q) \leqslant \operatorname{Inf}_{u>0} J(u)$ imposent, après intégration, $\int_X u^{2n/(n-2)} \, \mathrm{d}v(g) = 1$ et $\lim_{q \to 2n/(n-2)} I(u_q) = \operatorname{Inf}_{u>0} J(u)$.]

Reste ainsi à montrer que u n'est pas identiquement nulle. Ce qui utilise de façon fondamentale la valeur de la meilleure première constante A de l'inégalité de Sobolev (S1) (cf. paragraphe 2). Sous réserve de l'inégalité stricte du théorème, on obtient $\int_X u^2 \, \mathrm{d}v(g) > 0$ en remarquant que

$$\left(\int_X u_q^{2n/(n-2)} \, \mathrm{d}v(g) \right)^{(n-2)/n} \leqslant A \int_X |\nabla u_q|^2 \, \mathrm{d}v(g) + B \int_X u_q^2 \, \mathrm{d}v(g)$$

entraine

$$1 \leqslant A \operatorname*{Inf}_{A} I(u) + \mathrm{C^{te}} \int_X u^2 \, \mathrm{d}v(g) \ .$$

L'inégalité large du théorème est enfin toujours vérifiée, les fonctions test u_ϵ de Aubin [3] vérifiant $\lim_{\epsilon \to 0} J(u_\epsilon) = \frac{1}{4} n(n-2) \omega_n^{2/n}$, où

$$u_\epsilon=(\epsilon+r^2)^{1-n/2}-(\epsilon+\delta^2)^{1-n/2} \quad \text{si } r\leqslant\delta,\ \delta>0\ ,$$

$$u_\epsilon=0 \quad \text{si } r\geqslant\delta\ . \qquad \square$$

Avec ce théorème, le problème se ramène maintenant à mettre en évidence des fonctions test $u\in A$ pour lesquelles $J(u)<\frac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}$. x désignant un point de X, quitte à effectuer un changement conforme de la métrique, on peut supposer que $\mathrm{Ric}(g)(x)=0$. Les fonctions test u_ϵ de Aubin fournissent alors les estimées (Aubin [3])

$$J(u_\epsilon)=\tfrac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}$$

$$\times\left(1-\frac{\epsilon^2}{12n(n-4)(n-6)}\,|\mathrm{Weyl}(g)(x)|^2+\mathrm{o}(\epsilon^2)\right) \quad \text{si } n>6\ ,$$

$$J(u_\epsilon)=\tfrac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}+\frac{(n-2)(n-1)\omega_{n-1}}{60n(n-2)\omega_n^{1-2/n}}\,|\mathrm{Weyl}(g)(x)|^2\epsilon^2\,\mathrm{Log}\,\epsilon$$

$$+\mathrm{o}(\epsilon^2\,\mathrm{Log}\,\epsilon) \quad \text{si } n=6\ .$$

Par suite, s'il existe un point x de X où $\mathrm{Weyl}(g)(x)\neq 0$, on pourra trouver un ϵ assez petit pour que l'inégalité du théorème soit vérifiée. Et puisque le tenseur de Weyl est un invariant conforme, on obtient le théorème suivant.

Théorème (Aubin [3]). *Toute variété riemannienne compacte non localement conformément plate de dimension $n\geqslant 6$ possède, dans sa classe conforme, une métrique qui est à courbure scalaire constante. L'inégalité stricte du théorème fondamental est vérifiée.*

Reste ainsi à traiter des variétés de dimension 3, 4, 5, et des variétés localement conformément plates dont le groupe fondamental est infini (i.e., qui ne sont pas des quotients de S^n pour lesquels la solution est immédiate).

Si (X,g) est localement conformément plate, $X\neq S^n$, Schoen [77] introduit les fonctions test

$$u_\epsilon=(\epsilon^2+r^2)^{1-n/2}\ , \quad \text{si } r\leqslant\delta,\ \delta>0\ ,$$

$$u_\epsilon=K(\mathcal{G}_x-\eta\alpha)\ , \quad \text{si } \delta\leqslant r\leqslant 2\delta\ ,$$

$$u_\epsilon=K\mathcal{G}_x\ , \quad \text{si } r\geqslant 2\delta\ ,$$

où x désigne un point de X, g est choisie euclidienne au voisinage de x, $\mathcal{G}_x=\mathrm{C^{te}}/r^{n-2}+\alpha$ représente la fonction de Green en x de $\mathbb{L}_g$ (cf. paragraphe 3), K est une constante de raccord, η est une fonction radiale C^∞ qui vaut 1 pour $r\leqslant\delta$, 0 pour $r\geqslant 2\delta$, et qui vérifie $|\nabla\eta|\leqslant 2\delta^{-1}$. Ces fonctions fournissent l'estimée

$$I(u_\epsilon) \leqslant \tfrac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}\left(\int_X u_\epsilon^{2n/(n-2)}\,\mathrm{d}v(g)\right)^{(n-2)/n} - C\alpha(x)\epsilon^{n/2-1} + \mathrm{o}(\epsilon^{n/2-1}) ,$$

où C est une constante strictement positive indépendante de ϵ.

Par suite, avec la forme faible du théorème de la masse positive [$\alpha(x)>0$ si $X \neq S^n$, cf. paragraphe 3], on pourra trouver un ϵ suffisamment petit pour que l'inégalité du théorème fondamental de Aubin soit vérifiée.

Théorème (Schoen [77]). *Toute variété compacte localement conformément plate possède, dans sa classe conforme, une métrique qui est à courbure scalaire constante. L'inégalité stricte du théorème fondamental est vérifiée (si $X \neq S^n$).*

En dimension 3, il n'y a rien à changer à ce qui vient d'être dit. En dimension 4 ou 5, l'argument de Schoen devient plus complexe. Un changement local (non conforme) de g est utilisé (pour plus de détails, cf. Schoen [77]).

Finalement:

Théorème (Aubin [3], Schoen [77]). *Toute variété riemannienne compacte possède, dans sa classe conforme, une métrique qui est à courbure scalaire constante. Si $X \neq S^n$, l'inégalité stricte du théorème fondamental est en plus toujours vérifiée.*

Dans la réf. [62], Lee et Parker présentent un argument qui unifie ces travaux. Leurs fonctions test sont définies par

$$u_\epsilon = \mathcal{G}_x r^{n-2}(\epsilon^2 + r^2)^{1-n/2} \quad \text{si } r \leqslant \delta,\ \delta > 0 ,$$
$$u_\epsilon = \mathcal{G}_x \delta^{n-2}(\epsilon^2 + \delta^2)^{1-n/2} \quad \text{si } r \geqslant \delta .$$

Lorsque les métriques sont convenablement choisies (dans $[g]$), ces fonctions permettent de récupérer l'inégalité stricte du théorème fondamental, ou bien avec la norme du tenseur de Weyl au point x (dans le cas non localement conformément plat), ou bien avec la masse au point x (en dimensions 3, 4, 5 et dans le cas localement conformément plat).

Reste qu'il existe un argument plus simple où les fonctions test à considérer ne sont plus définies "à partir" de la géométrie de la variété, l'information géométrique nécessaire à la résolution du problème de Yamabe se trouvant isolée dans la non nullité du tenseur de Weyl ou dans la stricte positivité de la masse. Les calculs du cas non localement conformément plat (qui ne sont pas présentés dans la réf. [44]) sont identiques à ceux d'Aubin [3].

Théorème (Hebey et Vaugon [44]). *Pour $X \neq S^n$, $n \geqslant 3$, les fonctions*

$$u_\epsilon = (\epsilon + r^2)^{1-n/2} \quad \text{si } r \leqslant \delta, \delta > 0\,,$$
$$u_\epsilon = (\epsilon + \delta^2)^{1-n/2} \quad \text{si } r \geqslant \delta\,,$$

fournissent l'inégalité stricte du théorème fondamental de Aubin.

De façon plus précise: Lorsque la variété n'est pas localement conformément plate, en choisissant x et g tels que $\mathrm{Ric}(g)(x) = 0$ et $\mathrm{Weyl}(g)(x) \neq 0$, on obtient

$$J(u_\epsilon) = \tfrac{1}{4} n(n-2) \omega_n^{2/n} \times \left(1 - \frac{\epsilon^2}{12n(n-4)(n-6)} |\mathrm{Weyl}(g)(x)|^2 + \mathrm{o}(\epsilon^2)\right) \quad \text{si } n > 6\,,$$

$$J(u_\epsilon) = \tfrac{1}{4} n(n-2) \omega_n^{2/n} + \frac{(n-2)(n-1)\omega_{n-1}}{60n(n+2)\omega_n^{1-2/n}} |\mathrm{Weyl}(g)(x)|^2 \epsilon^2 \operatorname{Log} \epsilon + \mathrm{o}(\epsilon^2 \operatorname{Log} \epsilon) \quad \text{si } n = 6\,.$$

Par suite, pour $\epsilon \ll 1$, $J(u_\epsilon) < \frac{1}{4} n(n-2)\omega_n^{2/n}$.

Lorsque la variété est localement conformément plate, la métrique étant euclidienne au voisinage de x, on récupère

$$J(u_\epsilon) = \tfrac{1}{4} n(n-2) \omega_n^{2/n} + C\epsilon^{n/2-1}\left(\frac{n-2}{4(n-1)} \int_X \mathrm{Scal}(g)\, \mathrm{d}v(g) - \frac{(n-2)\delta^n \omega_{n-1}}{\epsilon + \delta^2} + \mathrm{o}(\epsilon)\right),$$

où C est une constante strictement positive indépendante de ϵ. Comme

$$\alpha(x) = \operatorname{Sup} \frac{4(n-1)}{(n-2)} \left(\frac{1}{\int_X \mathrm{Scal}(g')\, \mathrm{d}v(g')} - \frac{1}{4(n-1)\omega_{n-1}\rho^{n-2}} \right),$$

où le sup est pris sur les $0 < \rho \ll 1$ et sur les $g' \in [g]$ euclidiennes sur $B(x;\rho)$ qui vérifient $g'(x) = g(x)$ (cf. paragraphe 3), on peut choisir g de sorte que $J(u_\epsilon) < \frac{1}{4} n(n-2)\omega_n^{2/n}$ (pour $\epsilon \ll 1$, $X \neq S^n$).

En dimensions 3, 4 et 5, l'argument passe par une (re)-caractérisation de la masse (du type de celle ci-dessus). □

Depuis 1984, deux autres approches sont apparues. L'une, de type topologique, développée par Bahri [9] dans le cas localement conformément plat et par Bahri et Brézis [10] pour les dimensions 3, 4, 5, parvient à se passer du théorème de la masse positive. Les points critiques de J ainsi récupérés, à savoir les solutions de (E3), ne réalisent plus forcément le minimum de J. L'autre approche, présentée par Schoen [78], a pour cadre premier les variétés localement conformément plates. (Schoen [80] ayant récemment annoncé que ses résultats s'étendent au cas d'une variété quelconque.) Dans sa version initiale (le théorème ci-dessous), elle utilise principalement la notion de point de concentration, l'identité de Pohozaev et la forme faible du théorème de la masse positive. Une seconde démonstration (dont les grandes lignes sont données dans la réf. [80]), doit permettre de supprimer la borne sur l'énergie.

Théorème (Schoen [78]). *(X, g) désignant une variété riemannienne compacte localement conformément plate $(X \neq S^n)$, l'ensemble*

$$S_A = \left\{ u / \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{Scal}(g) u = K u^q, 1 < q \leqslant \frac{n+2}{n-2}, K \leqslant A, I(u) \leqslant A \right\},$$

quelque soit le réel strictement positif A, est un sous ensemble borné de $C^3(X)$.

A noter: Ce résultat est faux sur (S^n, g_0). $[C(S^n)$ n'est pas compact.]

7. Le problème de Yamabe équivariant

On sait déjà que toute variété riemannienne compacte possède, dans sa classe conforme, une métrique qui est à courbure scalaire constante (cf. paragraphe 6). Mais on peut faire mieux si l'on exige en plus d'avoir un contrôle sur le groupe d'isométries de cette métrique; autrement dit: en montrant que, dans la classe conforme de toute variété riemannienne compacte, il existe une métrique à courbure scalaire constante qui a un groupe d'isométries prescrit. Cette amélioration permet notamment de récupérer une des conjectures de Lichnerowicz (citée par Lelong-Ferrand [63]). Cette conjecture voulait $I_0(X, g) = C_0(X, g)$ dès que $\operatorname{Scal}(g) = C^{te}$ et $X \neq S^n$ [où $I_0(X, g)$ et $C_0(X, g)$ représentent les composantes connexes de l'identité dans $I(X, g)$ et $C(X, g)$]. Ce qui est vrai si $\operatorname{Scal}(g)$ est une constante négative (puisqu'il y a unicité), ce qui peut être faux lorsque $\operatorname{Scal}(g)$ est strictement positive (comme le montre l'exemple de $S^1 \times S^{n-1}$, $I_0(S^1) \times I_0(S^{n-1})$ opérant transitivement sur le produit; cf. paragraphe 8, Hebey et Vaugon [45] et Schoen [78]). Le meilleur résultat possible exigera ainsi $I(X, g) = C(X, g)$ (l'égalité optimale), non plus pour toute métrique à courbure scalaire constante (dans la classe conforme), mais pour au moins l'une d'entre elles. Ce résultat est démontré dans Hebey et Vaugon [46]. De façon plus precise:

Théorème A (Hebey et Vaugon [46]). *Etant donnée (X, g), une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, non conformément difféomorphe à la sphère, il existe toujours une métrique g' conforme à g qui vérifie tout à la fois: g' est à courbure scalaire constante, $I(X, g') = C(X, g)$.*

Théorème B (Hebey et Vaugon [46]). *Etant donnée (X, g), une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$, et G, un sous groupe compact de $C(X, g)$, il existe toujours une métrique conforme à g qui réalise le minimum de*

$$\operatorname{Vol}(g')^{-(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g')\, \mathrm{d}v(g')$$

sur l'ensemble des métriques g' conformes à g qui sont G-invariantes.

Le théorème A est une conséquence du théorème B. Tout d'abord parce que $C(X, g)$ est compact lorsque $X \neq S^n$ (cf. paragraphe 1). Ensuite parce que toute métrique qui réalise

$$\operatorname*{Inf}_{\{g' \text{ conformes à } g\ G\text{-invariantes}\}} \operatorname{Vol}(g')^{-(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g')\, \mathrm{d}v(g')$$

est forcément à courbure scalaire constante. Le théorème B est à rapprocher des questions de multiplicité (concernant l'existence de plusieurs métriques conformes distinctes ayant la même courbure scalaire constante; cf. paragraphe 8 et Hebey et Vaugon [45]).

A noter: Si $g' = u^{4/(n-2)} g$,

$$\operatorname{Vol}(g')^{-(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g')\, \mathrm{d}v(g') = \frac{(n-2)}{4(n-1)} J(u)\,.$$

Si $G \subset C(X, g)$ est compact, $\exists g'$ conforme à $g / G \subset I(X, g')$.

La conjecture suivante généralise la seconde conjecture de Aubin [3]. Sa réalisation entraine automatiquement le théorème B (lorsque $X \neq S^n$ ou si G n'a pas de point fixe; cf. ci-dessous). Pour $x \in X$ et $G \subset C(X, g)$, on note $O_G(X)$ l'orbite de x sous G. On appelle orbite minimale de G toute orbite $O_G(x)$ pour laquelle $\operatorname{Card} O_G(x) \leqslant \operatorname{Card} O_G(y)$, $\forall y \in X$.

Conjecture. *Soient (X, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$ et G un sous groupe compact de $C(X, g)$ qui possède des orbites finies. Si X n'est pas conformément difféomorphe à la sphère ou si G n'a pas de point fixe, alors*

$$\operatorname*{Inf}_{\{g' \text{ conformes à } g\ G\text{-invariantes}\}} \operatorname{Vol}(g')^{-(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g')\, \mathrm{d}v(g')$$

$$< n(n-1)\omega_n^{2/n} \Big[\operatorname*{Inf}_{x \in X} \operatorname{Card} O_G(x) \Big]^{2/n}\,.$$

Théorème C (Hebey et Vaugon [46]). *L'inégalité stricte*

$$\operatorname*{Inf}_{\{g' \text{ conformes à } g\ G\text{-invariantes}\}} \operatorname{Vol}(g')^{-(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g')\, dv(g')$$

$$< n(n-1)\omega_n^{2/n} \left[\operatorname*{Inf}_{x \in X} \operatorname{Card} O_G(x) \right]^{2/n}$$

est vérifiée dans chacun des cas suivants. (1) G opère librement. (2) $3 \leqslant \dim X \leqslant 11$. *(3) Il existe un point x d'orbite minimale (finie) sous G avec* $\nabla^i \operatorname{Weyl}(g)(x) = 0$ *pour tout* $0 \leqslant i \leqslant (n-6)/2$. *(4) Il existe un point x d'orbite minimale (finie) sous G pour lequel soit* $\operatorname{Weyl}(g)(x) \neq 0$, *soit* $\nabla \operatorname{Weyl}(g)(x) \neq 0$, *soit* $\nabla^2 \operatorname{Weyl}(g)(x) \neq 0$. *[En particulier, l'inégalité est vérifiée lorsque* (X, g) *est localement conformément plate, ou plus généralement si* $\operatorname{Weyl}(g) = 0$ *au voisinage d'une orbite minimale de G.]*

Le théorème qui suit, l'analogue du théorème fondamental de Aubin [3], est un des outils de base dans la démonstration des théorèmes A et B. Ces théorèmes deviennent ainsi des corollaires du théorème C, autrement dit démontrés via une approche par fonctions test symétrisées. En ce qui concerne les variétés non couvertes par le théorème C [donc de dimensions $n \geqslant 12$ et pour lesquelles tout point x d'orbite minimale vérifie: $\forall j = 0, 1, 2$, $\nabla^j \operatorname{Weyl}(g)(x) = 0$ et $\exists\, 3 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-6)/$ $\nabla^i \operatorname{Weyl}(g)(x) \neq 0$], une "élimination à priori" de plusieurs phénomènes de concentration est utilisée. Celle-ci nous ramène exactement aux hypothèses énoncées dans le point (3) du théorème C, la démonstration combinant ainsi l'élimination à priori et un calcul d'éstimées symétrisées.

Théorème (Hebey et Vaugon [46]). *Si le minimum de* $\operatorname{Vol}(g')^{-(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g')\, dv(g')$ *sur l'ensemble des métriques g' conformes à g qui sont G-invariantes est strictement inférieur à* $n(n-1)\omega_n^{2/n} [\operatorname{Inf}_{x \in X} \operatorname{Card} O_G(x)]^{2/n}$, *alors il est atteint. (Ce qui est en particulier le cas si toutes les orbites de G sont infinies.) L'inégalité large*

$$\operatorname*{Inf}_{\{g' \text{ conformes à } g\ G\text{-invariantes}\}} \operatorname{Vol}(g')^{-(n-2)/n} \int_X \operatorname{Scal}(g')\, dv(g')$$

$$\leqslant n(n-1)\omega_n^{2/n} \left[\operatorname*{Inf}_{x \in X} \operatorname{Card} O_G(x) \right]^{2/n}$$

est toujours vérifiée. L'égalité a lieu sur S^n *lorsque G possède un point fixe.*

Sans rentrer dans trop de détails, la difficulté la plus importante recontrée dans la démonstration du théorème C vient du cas non localement conformément plat. Parce qu'il est possible de montrer que les points de concentrations sont forcément des points d'orbite minimale sous G (perte d'homogénéité), et parce qu'il se peut très bien que le tenseur de Weyl s'annule en tous ces points d'orbite minimale (sans pour autant s'annuler à un ordre suffisant), les fonctions test à considérer devront maintenant permettre de récupérer la norme des gradients successifs du tenseur de Weyl aux points d'orbites minimales [jusqu'à l'ordre $(n-6)/2$], puis la masse de la variété asymptotiquement plate $(X-\{x\}, \mathscr{G}_x^{4/(n-2)}g)$. A la différence du problème de Yamabe "classique" (où $G=\{\mathrm{Id}\}$), la démonstration utilise fondamentalement la forme forte du théorème de la masse positive. Ses bases reposent sur une étude fine de la notion de coordonnées conformes normales équivariantes (des métriques G-invariantes dont le déterminant en tout point d'une orbite admet un développement du type $\det g = 1 + o(r^m)$, $m \gg 1$). Le cas localement conformément plat $(X \neq S^n)$ rentre dans le cas où le tenseur de Weyl est nul jusqu'à l'ordre $(n-6)/2$. Ceci dit, lorsque le tenseur de Weyl s'annule au voisinage d'une orbite minimale, on peut présenter une démonstration plus simple qui n'utilise plus que la forme faible du théorème de la masse positive (toujours à base de fonctions test symétrisées, mais dans une métrique euclidienne G-invariante). Le cas de la sphère, lorsque G n'a pas de point fixe, se traite aussi par fonctions test symétrisées. Si G possède un point fixe, un argument géométrique permet de conclure.

8. Multiplicités pour les problèmes de Nirenberg, de courbure scalaire prescrite et de Yamabe

Commençons par traiter de la multiplicité qui est rattachée au problème de Nirenberg. Il s'agira donc de déterminer quelles fonctions de $C^\infty(S^n)$ sont courbures scalaires de plusieurs métriques distinctes conformes à g_0. Une première approche est présentée dans Hebey et Vaugon [45]. Elle fait jouer un rôle fondamental aux secondes constantes de l'inclusion de Sobolev (S2) des quotients de la sphère (cf. paragraphe 2). Les métriques sont alors distinguées par leur énergie. Nous reviendrons sur cette approche de façon plus précise lorsque nous parlerons de la multiplicité qui est rattachée au problème de Yamabe. Les résultats obtenus ont lieu en toute dimension et permettent notamment d'avoir une multiplicité arbitrairement grande de métriques conformes distinctes ayant la même courbure scalaire. Pour ne pas trop alourdir la rédaction, nous ne citerons qu'un de ces résultats. Si $f \in C^\infty(S^3)$, on note $⨍_{S^3} f(x)\, dv(g_0)$ sa valeur moyenne.

Théorème (Hebey et Vaugon [45]). *Soit f une fonction C^∞-positive définie sur* S^3, *invariante sous l'action d'un groupe fini d'isométries de* S^3 *qui possède deux sous groupes distincts G_1 et G_2, G_1 de cardinal a opérant globalement sans point fixe et G_2 de cardinal $b > a$ opérant librement. Si*

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3} > 1 + b^3 \left(\frac{\int_{S^3} f(x)\, dv(g_0)}{\operatorname{Sup}_{S^3} f(x)}\right)^{1/6},$$

f est alors la courbure scalaire d'au moins deux métriques distinctes conformes à g_0. Ces deux métriques ont des énergies distinctes; elles sont respectivement G_1-invariante et G_2-invariante.

Les autres travaux concernant la multiplicité relative au problème de Nirenberg aboutissent à des résultats de densité. Schoen et Zhang [83] ont travaillés dans cette direction, ainsi que Li [67], qui a récemment annoncé un résultat qui couvre leur théorème.

Théorème (Li [67]). *Soit f une fonction strictement positive de $C^\infty(S^n)$, avec $n=3$ ou 4. A tout entier k et tout réel $\epsilon>0$, on peut associer une fonction $f_{\epsilon,k} \in C^\infty(S^n)$, vérifiant $\|f-f_{\epsilon,k}\|_{C^0(S^n)} \leqslant \epsilon$, qui est la courbure scalaire d'au moins k métriques distinctes conformes à g_0.*

La question similaire sur $X \neq S^n$ devrait être plus simple, puisqu'on évite déjà les obstructions relatives à l'existence d'au moins une métrique qui ait une courbure scalaire donnée. Au paragraphe 5, nous avons parlé de la multiplicité relative au cas $\mathrm{Scal}(g)<0$. Pour ce qui est du cas $\mathrm{Scal}(g)>0$, les techniques développées dans Hebey et Vaugon [45] permettent aussi d'obtenir des résultats de multiplicité. Soit par exemple (X, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3, $X \neq S^3$, localement conformément plate à courbure scalaire strictement positive. On obtient alors:

Théorème (Hebey et Vaugon). *A tout sous groupe fini G d'isométries de X opérant librement, on peut associer une constante $k(G)>0$, de sorte que toute fonction f G-invariante strictement positive de $C^\infty(X)$ qui vérifie*

$$(\operatorname{Card} G)^{2/3} > 1 + k(G) \left(\frac{\int_X f(x)\, dv(g)}{\operatorname{Sup}_X f(x)}\right)^{1/6},$$

est la courbure scalaire d'au moins deux métriques distinctes conformes à g.

Abordons maintenant la multiplicité qui est rattachée au problème de Yamabe. Il s'agira de determiner quelles variétés riemanniennes compactes possèdent plusieurs métriques distinctes conformes ayant la même courbure scalaire constante. Les premiers résultats rencontrés sont des résultats d'obstruction. Par exemple, la variété étant supposée non conformément difféomorphe à S^n, la métrique à courbure scalaire constante est forcément unique dans la classe conforme de g (à homothétie près)

(1) soit lorsque $\operatorname{Inf}_{u>0} I(u) \leqslant 0$ (principe du maximum),

(2) soit lorsqu'il existe une métrique conforme à g qui est d'Einstein (cf. Obata [71]).
En particulier, dans le cas localement conformément plat, $X \neq S^n$, la question ne peut avoir de réponse positive que si simultanément, card $\Pi_1(X) = \infty$ et $\mathrm{Inf}_{u>0} I(u) > 0$. (En 1986, Gil-Medrano [38] a établie une liste des variétés connues qui vérifient ces deux points.)

A ce jour, seuls quelques exemples explicites de multiplicité ont été obtenus. Il y a tout d'abord le cas de (S^n, g_0), où l'on connait précisément la structure de l'ensemble des métriques conformes à g_0 qui ont une même courbure scalaire constante. Cet ensemble est constitué, à homothéties près, des métriques canoniques [à savoir des $\phi * g_0$, $\phi \in C(S^n, g_0)$]. Les métriques obtenues ont toutes la même énergie. Vient ensuite le cas de $S^1(T) \times S^{n-1}$, produit du cercle de rayon T et de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, le seul autre exemple où nous avons une déscription complète de l'ensemble des métriques conformes qui ont une même courbure scalaire constante. Il s'agit là d'un résultat récemment obtenu par Schoen [78], ses travaux s'appuyant sur les théorèmes de Caffarelli, Gidas et Spruck [24] qui ramènent l'équation de courbure scalaire sur $S^1(T) \times S^{n-1}$ à une équation sur $\mathbb{R}$. Cet exemple met en évidence des cas de multiplicité avec niveaux d'énergie distincts.

Reste enfin à parler de l'approche qui est présentée dans Hebey et Vaugon [45]. Il s'agira de caractériser les variétés (X, g) pour lesquelles

$$\operatorname*{Inf}_{u>0,\, u\ G\text{-invariantes}} J(u) > \operatorname*{Inf}_{u>0} J(u) ,$$

où G est un sous groupe du groupe des isométries de g. Avec le théorème B du paragraphe 7 (le problème de Yamabe équivariant, Hebey et Vaugon [46]), une telle inégalité fournit obligatoirement deux métriques conformes ayant la même courbure scalaire constante. Cette approche, si on se restreint au cas où G opère librement, se généralise naturellement aux revêtements riemanniens. La question devient: caractériser les revêtements riemanniens $\Pi: (X_0, g_0) \to (X_1, g_1)$ pour lesquels

$$\operatorname*{Inf}_{\{u \in H_1^2(X_1),\, u \neq 0\}} J(u \circ \Pi) > \operatorname*{Inf}_{\{u \in H_1^2(X_0),\, u \neq 0\}} J(u) .$$

Par opposition avec les questions d'existence, où la première constante de l'inclusion de Sobolev joue un rôle primordial (via le théorème fondamental de Aubin [3]), elle développe le rôle des secondes constantes.

Si (X, g) désigne une variété riemannienne compacte et si k désigne un réel de $]0, 1]$, on définit $C_k(X, g)$ comme étant la plus petite constante positive C pour laquelle

$$\tfrac{1}{4}(1-k)n(n-2)\omega_n^{2/n}\int_X |u|^{2n/(n-2)}\,dv(g)$$
$$\leqslant \int_X |\nabla u|^2\,dv(g)+\frac{n-2}{4(n-1)}\int_X \mathrm{Scal}(g)u^2\,dv(g)+C\int_X u^2\,dv(g)\,,$$
$$\forall u\in H_1^2(X)\,.$$

$C_k(X,g)$ existe bien lorsque $0<k\leqslant 1$; il s'agit du premier théorème de Aubin cité au paragraphe 2. Dans le cas localement conformément plat, puisque l'inégalité (S2) est vérifiée (cf. paragraphe 2 ou Hebey et Vaugon [45]), on peut définir $C_0(X,g)$ comme étant la plus petite constante positive C pour laquelle

$$\tfrac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}\int_X |u|^{2n/(n-2)}\,dv(g)$$
$$\leqslant \int_X |\nabla u|^2\,dv(g)+\frac{n-2}{4(n-1)}\int_X \mathrm{Scal}(g)u^2\,dv(g)+C\int_X u^2\,dv(g)\,,$$
$$\forall u\in H_1^2(X)\,.$$

Théorème (Hebey et Vaugon [45]). *Soit* (X_0,g_0), $X_0\neq S^n$, $n\geqslant 3$, *une variété riemannienne compacte pour laquelle il existe m revêtements riemanniens à* b_i *feuillets*

$$\Pi_i:(X_0,g_0)\to(X_i,g_i)\,,\quad 1<b_1<\cdots<b_m\,.$$

On note $b_0=1$ *et* $\Pi_0:X_0\to X_0$ *l'application identité. Si pour tout* $i=1,\ldots,m$ *il existe* $k_i\in[0,1]$ *de sorte que*

$$C_{k_i}(X_i,g_i)\ Vol(X_0)^{2/n}\leqslant \tfrac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}[(1-k_i)b_i^{2/n}-b_{i-1}^{2/n}]\,,$$

alors (X_0,g_0) *possède au moins* $m+1$ *métriques conformes à* g_0 *qui ont la même courbure scalaire constante (et des énergies distinctes). Ces métriques sont du type* $(u_i\circ\Pi_i)^{4/(n-2)}g_0$, $0\leqslant i\leqslant m$, *où les* u_i *sont des fonctions strictement positives de* $C^\infty(X_i)$.

Avec ce théorème, et l'estimée sur la seconde constante de l'inégalité (S2) sur $S^1(T)\times S^{n-1}$ (paragraphe 2 ou Hebey et Vaugon [45]), on récupère immédiatement le cas de $S^1(T)\times S^{n-1}$. Mais on récupère aussi des variétés du type: produit d'un espace hyperbolique compact avec une sphère. De façon plus précise:

Théorème (Hebey et Vaugon [45], Schoen [78]). *A tout entier k, on peut associer une constante* $T(k)>0$ *de sorte que pour tout* $T\geqslant T(k)$, $S^1(T)\times S^{n-1}$ *possède au moins k métriques conformes à la métrique canonique produit qui ont la même courbure scalaire constante (et des énergies distinctes).*

Théorème (Hebey et Vaugon [45]). *Si* $(\mathrm{T}^2(-1), h)$ *désigne un espace hyperbolique de dimension* 2, *somme connexe de plusieurs exemplaires du tore* T^2, *alors pour p grand,* $\mathrm{T}^2(-1)\times \mathrm{S}^p$ *possède au moins trois métriques conformes à la métrique canonique produit* $h\times g_0$, *qui ont la même courbure scalaire constante (et des énergies distinctes).*

Remarquons pour finir qu'on peut fabriquer un certain nombre de variétés qui admettent au moins deux métriques distinctes conformes ayant la même courbure scalaire constante. Si (X_1, g_1) et (X_2, g_2) sont compactes, avec $\mathrm{Scal}(g_1)$ et $\mathrm{Scal}(g_2)$ qui sont constantes et $\mathrm{Scal}(g_2)>0$, le produit $X=X_1\times X_2$ vérifie cette propriété lorsqu'il est muni des métriques $g_c=(cg_1)\times g_2$, où la constante $c>0$ est choisie suffisamment grande. On récupère en effet $J(1)>\frac{1}{4}n(n-2)\omega_n^{2/n}$, dès que $c\gg 1$. Dans le même ordre d'idées, on peut utiliser un résultat de Aubin [3] qui stipule que la première valeur propre du laplacien d'une métrique $u^{4/(n-2)}g$ qui vérifie $J(u)=\mathrm{Inf}_{u>0}J(u)$, majore forcément $\mathrm{Scal}(u^{4/(n-2)}g)/(n-1)$. Pour $p>q+1$, on obtient alors au moins deux métriques ayant la même courbure scalaire constante dans la classe conforme de la métrique produit $g_{p,q}$ de $\mathrm{S}^p\times \mathrm{S}^q$ [puisque $\lambda_1(g_{p,q})=q$ et $\mathrm{Scal}(g_{p,q})=p(p-1)+q(q-1)$]. Si $p=q$, $(\mathrm{S}^p\times \mathrm{S}^q, g_{p,q})$ est d'Einstein, la métrique à courbure scalaire constante est unique.

Terminons enfin avec un résultat de densité récemment annoncé par Pollack (et cité dans Schoen [79]). Le théorème s'énonce de la façon suivante.

Théorème (Pollack). *Etant donnés* (X, g) *une variété riemannienne compacte à courbure scalaire strictement positive, k un entier et* ϵ *un réel strictement positif, il existe une métrique riemannienne* $g_{\epsilon,k}$ *sur X qui vérifie: (1)* $\|g_{\epsilon,k}-g\|_{C^1}<\epsilon$. *(2)* $[g_{\epsilon,k}]$ *possède au moins k métriques distinctes qui ont la même courbure scalaire constante.*

Bibliographie

[1] Th. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds - Monge–Ampère Equations,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 252 (Springer, Berlin, 1982).

[2] Th. Aubin, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, J. Diff. Geom. 11 (1976) 573–598.

[3] Th. Aubin, Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 269–296.

[4] Th. Aubin, Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes, Bull. Sci. Math. 100 (1976) 149–173.

[5] Th. Aubin, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, J. Funct. Anal. 32 (1979) 148–174.

[6] Th. Aubin, *Best Constants in the Sobolev Imbedding Theorem – The Yamabe Problem* (Princeton University Press, 1982).

[7] Th. Aubin et E. Hebey, Courbure scalaire prescrite, Bull. Sci. Math. 115 (1991) 125–132.

[8] T. Badredine, Sur la courbure scalaire des variétés riemanniennes de cohomogénéité un, Thèse de l'Université de Nancy I (1986).
[9] A. Bahri, Proof of the Yamabe conjecture, without the positive mass theorem, for locally conformally flat manifolds, preprint.
[10] A. Bahri et H. Brézis, Equations elliptiques non linéaires sur des variétés avec exposant de Sobolev critique, C.R. Acad. Sci. 307 Ser. I (1988) 573–576.
[11] A. Bahri et J.M. Coron, On a nonlinear elliptic equation involving the limiting Sobolev exponent, Commun. Pure Appl. Math. XLI (1988) 253–294.
[12] A. Bahri et J.M. Coron, The scalar curvature problem on the standard three-dimensional sphere, C.R. Acad. Sci. 300, Ser. I (1985) 513–516; J. Funct. Anal. 95 (1991) 106–172.
[13] R. Bartnik, The mass of an asymptotically flat manifold, Commun. Pure Appl. Math. 34 (1986) 661–693.
[14] L. Bérard-Bergery, La courbure scalaire des variétés riemanniennes, Sém. Bourbaki (1979/1980) no. 556.
[15] L. Bérard-Bergery, *Scalar Curvature and Isometry Group, Spectra of Riemannian Manifolds* (Kaigai Publ., Tokyo, 1983) pp. 9–28.
[16] M.S. Berger, On riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds, J. Diff. Geom. 5 (1971) 325–332.
[17] A.L. Besse, *Einstein Manifolds* (Springer, Berlin, 1987).
[18] J.P. Bourguignon, Invariants intégraux fonctionels pour des équations aux dérivées partielles d'origine géométrique, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques (1985).
[19] J.P. Bourguignon et J.P. Ezin, Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations, Trans. Am. Math. Soc. 301 (1987) 723–736.
[20] H. Brézis, Nonlinear elliptic equations involving the critical Sobolev exponent – Survey and perspectives, in: Proc. Symp. *Nonlinear Differential Equations* (MRC, Madison, 1985).
[21] H. Brézis, Elliptic equations with limiting Sobolev exponents – the impact of topology, Commun. Pure Appl. Math. XXXIX (1986) 17–39.
[22] H. Brézis, Some variational problems with lack of compactness, Commun. Paris 6, no. 84028.
[23] H. Brézis et J.M. Coron, Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles, Commun. Paris 6, no. 84020.
[24] L. Caffarelli, B. Gidas et J. Spruck, Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, Commun. Pure Appl. Math. 42 (1989) 271–297.
[25] S.Y.A. Chang et P.C. Yang, Isospectral conformal metrics on 3-manifolds, J. Am. Math. Soc. 3 (1990) 117–145.
[26] S.Y.A. Chang et P.C. Yang, The conformal deformation equation and isospectral of conformal metrics, Contemp. Math. 101 (1989) 165–178.
[27] S.Y.A. Chang et P.C. Yang, A perturbation result in prescribing scalar curvature on S^n, Duke Math. J. 64 (1991) 27–69.
[28] S.Y.A. Chang et P.C. Yang, Conformal deformation of metrics on S^2, J. Diff. Geom. 27 (1988) 259–296.
[29] P. Cherrier, Une inégalité de Sobolev sur les variétés riemanniennes, Bull. Sci. Math. 103 (1979) 353–374.
[30] P. Cherrier, Meilleures constantes dans des inégalités relatives aux espaces de Sobolev, Bull. Sci. Math. 108 (1984) 225–262.
[31] P. Cherrier, Problèmes de Neumann non linéaires sur les variétés riemanniennes, J. Funct. Anal. 57 (1984) 154–206.
[32] J.M. Coron, Topologie et cas limite des injections de Sobolev, C.R. Acad. Sci. 299, Ser. I (1984) 209–212.
[33] J. Eells et J.H. Sampson, Harmonic mappings of riemannian manifolds, Am. J. Math. 86 (1964) 109–160.
[34] J.F. Escobar et R. Schoen, Conformal metrics with prescribed scalar curvature, Inv. Math. 86 (1986) 243–254.
[35] D. Fortunato and G. Palmieri, Remarks on the Yamabe problem and the Palais–Smale condition, Rend. Sem. Univ. Padova 75 (1986) 47–65.

[36] S. Gallot, A Sobolev inequality and some geometric applications, dans: Proc. Franco–Japonese Seminar (Kyoto, 1981) (Kaigai Publ., Tokyo, 1983) pp. 45–55.
[37] B. Gidas, W. Ni et L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, in: *Mathematical Analysis and Applications*, ed. L. Nachbin (Academic Press, New York, 1981) pp. 370–401.
[38] O. Gil-Medrano, On the Yamabe problem concerning the compact locally conformally flat manifolds, J. Funct. Anal. 66 (1986) 42–53.
[39] H. Hamza, Transformations conformes des variétés riemanniennes à bord, Thèse de l'Université Paris 6 (1988).
[40] Z.C. Han, Prescribing gaussian curvature on S^2, Duke Math. J. 61 (1990) 679–703.
[41] E. Hebey, Changements de métriques conformes sur la sphère – Le problème de Nirenberg, Bull. Sci. Math. 114 (1990) 215–242.
[42] E. Hebey, A propos d'un théorème non linéaire de Th. Aubin pour la transformation conforme de la courbure scalaire sur S^n, C.R. Acad. Sci. Paris 314 (1992) 183–185.
[43] E. Hebey, La méthode d'isométrie-concentration dans le cas d'un problème non linéaire sur les variétés compactes à bord, C.R. Acad. Sci. Paris 311 (1990) 325–327; Bull. Sci. Math. 116 (1992) 35–51.
[44] E. Hebey et M. Vaugon, Remarque sur le problème de Yamabe, C.R. Acad. Sci. Paris 311 (1990) 723–725; J. Funct. Anal. 96 (1991) 31–37.
[45] E. Hebey et M. Vaugon, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problèmes de Nirenberg et Yamabe, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992) 377–407.
[46] E. Hebey et M. Vaugon, Le problème de Yamabe équivariant, Bull. Sci. Math. 117 (1993) 241–286.
[47] E. Hebey et M. Vaugon, Courbure scalaire prescrite pour des variétés non conformément difféomorphes à la sphère, C.R. Acad. Sci. Paris 316 (1993) 281–282.
[48] O. Hijazi, Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe, C.R. Acad. Sci. Paris 313 (1991) 865–868.
[49] C.C. Hsiung, On the group of conformal transformations of a compact riemannian manifold III, J. Diff. Geom. 2 (1968) 185–190.
[50] S. Ilias, Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes, Ann. Inst. Fourier 33 (1983) 151–165.
[51] S. Ilias, A Sobolev inequality, C.R. Acad. Sci. Ser. I 294 (1982) 731–734.
[52] A. Inoue, On Yamabe's problem by a modified direct method, Tôhoku Math. J. 34 (1982) 499–507.
[53] M. Itoh, Yamabe metrics and the space of conformal structures, preprint.
[54] S. Kato, Symmetric solutions of the equation for the scalar curvature under conformal deformation of a riemannian metric, J. Math. Soc. Japan 43 (1991) 733–750.
[55] J.L. Kazdan, Gaussian and scalar curvature: un update, Seminar on *Differential Geometry*, ed. S.T. Yau. Ann. Math. Studies 102 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982) pp. 185–192.
[56] J.L. Kazdan, Prescribing the curvature of a riemannian manifold. Expository lectures from CBMS Regional Conf. (Polytechnic Institute, New York, 1984), Regional Conf. Ser. in Math., no. 57.
[57] J.L. Kazdan et F.W. Warner, Scalar curvature and conformal deformation of riemannian structure, J. Diff. Geom. 10 (1975) 113–134.
[58] J.L Kazdan et F.W. Warner, Remarks on some quasilinear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975) 567–597.
[59] O. Kobayashi, Scalar curvature of a metric with unit volume, Math. Ann. 279 (1987) 253–265.
[60] R.S. Kulkarni et U. Pinkall, eds., *Conformal geometry*, Publ. Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn (Vieweg, 1988).
[61] J. Lafontaine, Remarques sur les variétés conformément plates, Math. Ann. 259 (1982) 313–319.
[62] J.M. Lee et T.H. Parker, The Yamabe problem, Bull. Am. Math. Soc. 17 (1987) 37–91.
[63] J. Lelong-Ferrand, Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes, Acad. R. Bélg. Cl. Sci. Mém. 39 (1971) 5–44.

[64] P. Li, On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact riemannian manifold, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 13 (1980) 451–469.

[65] P. Li et S.T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold, Proc. Symp. Pure Math. 36 (1980) 205–239.

[66] Y. Li, Sur l'ensemble des métriques à courbure scalaire constante, Thèse de l'Université Paris 6 (1991).

[67] Y.Y. Li, On prescribing scalar curvature problem on S^3 and S^4, C.R. Acad. Sci. Paris 314 (1992) 55–59.

[68] A. Lichnerowicz, Sur les transformations conformes d'une variété riemannienne compacte, C.R. Acad. Sci. 259 (1964) 697–700.

[69] D. Montgomery et H. Samelson, Transformation groups of spheres, Ann. Math. 44 (1943) 454–470.

[70] J. Moser, On a nonlinear problem in differential geometry, Dyn. Syst. (Academic Press, New York, 1973).

[71] M. Obata, The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 6 (1971) 247–258.

[72] T. Ouyang, On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u+\lambda u+hu^p=0$ on compact manifolds. Part II, Indiana Univ. Math. J. 40 (1991) 1083–1141.

[73] T. Parker et H. Taubes, On Witten's proof of the positive energy theorem, Commun. Math. Phys. 84 (1982) 223–238.

[74] T. Parker et S. Rosenberg, Invariants of conformal laplacians, J. Diff. Geom. 25 (1987) 199–222.

[75] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u+\lambda f(u)=0$, Sov. Math. Dokl. 6 (1965) 1408–1411.

[76] A. Rauzy, Sur les courbures scalaires d'une classe conforme d'invariant négatif, C.R. Acad. Sci. Paris 316 (1993) 273–276.

[77] R. Schoen, Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geom. 20 (1984) 479–495.

[78] R. Schoen, Variational theory for the total scalar curvature functional for riemannian metrics and related topics, dans: *Topics in Calculus of Variations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1365 (Springer, Berlin, 1989).

[79] R. Schoen, A report on some recent progress on nonlinear problems in geometry, preprint.

[80] R. Schoen, On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class, preprint.

[81] R. Schoen et S.T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Commun. Math. Phys. 65 (1979) 45–76.

[82] R. Schoen et S.T. Yau, Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature, Inv. Math. 92 (1988) 47–71.

[83] R. Schoen et D. Zhang, Conformal deformations of metrics on S^n, preprint; New results on geometric variational problems, Stanford dissertation.

[84] G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, Ann. Math. Pure Appl. 110 (1976) 353–372.

[85] M. Troyanov, Un principe de concentration compacité pour les suites de surfaces riemanniennes, Ann. Inst. H. Poincaré, section analyse non linéaire, à paraître.

[86] M. Troyanov, Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities, Trans. Am. Math. Soc., à paraître.

[87] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1968) 265–274.

[88] N. Trudinger, Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations, Inv. Math. 61 (1980) 67–69.

[89] M. Vaugon, Equations différentielles non linéaires sur les variétés riemanniennes compactes I et II, Bull. Sci. Math. 106 (1982) 351–367; 107 (1983) 371–391.

[90] M. Vaugon, Transformation conforme de la courbure scalaire sur la sphère, Ann. Inst. H. Poincaré 3 (1986) 55–65.

[91] M. Vaugon, Transformation conforme de la courbure scalaire sur une variété riemannienne compacte, J. Funct. Anal. 71 (1987) 182–194.

[92] J.L. Vazquez et L. Véron, Solutions positives d'équations elliptiques semi-linéaires sur des variétés riemanniennes compactes, C.R. Acad. Sci. Paris 312 (1991) 811–815.
[93] E. Witten, A new proof of the positive energy theorem, Commun. Math. Phys. 80 (1981) 381–402.
[94] H. Yamabe, On a deformation of riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J. 12 (1960) 21–37.
[95] K. Yano, On riemannian manifolds with constant curvature admitting a conformal transformation group, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 55 (1966) 472–476.
[96] K. Yano et H. Hiramatu, Riemannian manifolds admitting an infinitesimal conformal transformation, J. Diff. Geom. 10 (1975) 23–38.
[97] K. Yano et S. Sawaki, Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, J. Diff. Geom. 2 (1968) 161–184.
[98] S.T. Yau, *Problem Section* (Princeton University Press, 1982).
[99] S.T. Yau, *Survey on Partial Differential Equations in Differential Geometry* (Princeton University Press, 1982).